

Паралелни бързи алгоритми за разделяне на променливите

Гергана Бенчева

ИПОИ – БАН

gery@parallel.bas.bg

Съдържание

Постановка

Методи

Паралелна
реализация

Ефективност

Числени
експерименти

- Постановка на задачата и дискретизация
- Методи за разделяне на променливите
- Паралелна реализация
- Оценки на паралелните времена и ускорения
- Числени експерименти

Постановка

- Дискретизация
- Структура на матрицата на коравина

Методи

Паралелна реализация

Ефективност

Числени експерименти

Постановка на задачата и дискретизация

Постановка на задачата

Постановка

- Дискретизация
- Структура на матрицата на коравина

Методи

Паралелна реализация

Ефективност

Числени експерименти

Елиптическа гранична задача от втори ред:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\nabla \cdot (a(y)\nabla u(y)) = f(y) \quad \text{в } \Omega, \\ u = \mu(y) \quad \text{върху } \Gamma_D, \\ (a(y)\nabla u(y)) \cdot n = g(y) \quad \text{върху } \Gamma_N. \end{array} \right.$$

⇓ Дискретизация (МКР, МКЕ)

$$Ax = f$$

Цел: ефективни последователни и паралелни алгоритми за решаване на получената СЛАУ

Дискретизация

Постановка

● Дискретизация

● Структура на матрицата на коравина

Методи

Паралелна реализация

Ефективност

Числени експерименти

Елиптическа гранична задача с разделящи се променливи:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \sum_{s=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_s} \left(a_s(y_s) \frac{\partial u}{\partial y_s} \right) = f(y), \quad y \in \Omega = [a, b] \times [c, d] \\ u = \mu(y), \quad y \in \partial\Omega \end{array} \right.$$

⇓ МКР при петточков шаблон „кръст“, $n \times m$ мрежа

$$A = B \otimes I_n + I_m \otimes T,$$

$$\mathbf{x}^T = (\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T, \dots, \mathbf{x}_m^T), \quad \mathbf{f}^T = (\mathbf{f}_1^T, \mathbf{f}_2^T, \dots, \mathbf{f}_m^T),$$

$$\mathbf{x}_j, \mathbf{f}_j \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$\mathbf{x}_j = (x_{1,j}, x_{2,j}, \dots, x_{n,j})^T, \quad \mathbf{f}_j = (f_{1,j}, f_{2,j}, \dots, f_{n,j})^T,$$

$$C \otimes D = \{c_{i,j} D\}_{i=1, j=1}^{m_1, n_1}, \quad \text{където } C = \{c_{i,j}\}_{i=1, j=1}^{m_1, n_1},$$

$$D = \{d_{i,j}\}_{i=1, j=1}^{m_2, n_2}$$

Структура на матрицата на коравина

Постановка

- Дискретизация
- Структура на матрицата на коравина

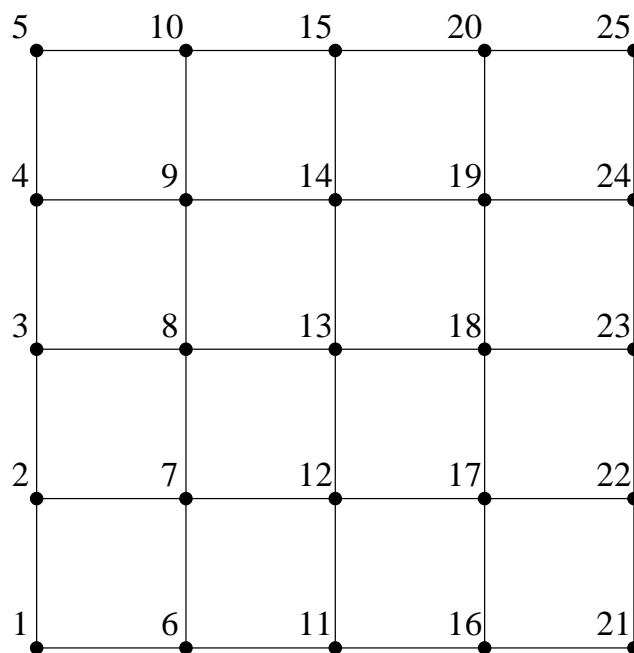
Методи

Паралелна реализация

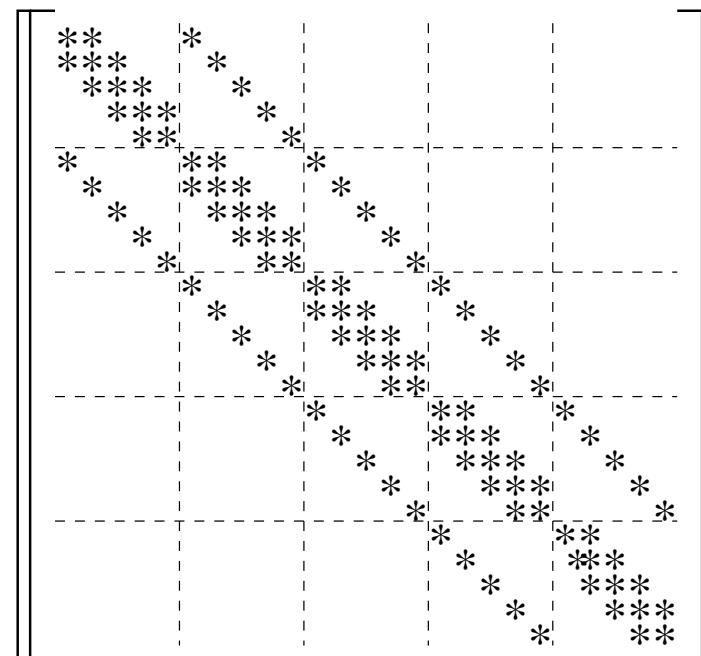
Ефективност

Числени експерименти

МКР при петточков шаблон „кръст“ за задача с разделящи се променливи



а) триангулация;



б) матрица на коравина A

Постановка

Методи

- Методи за разделяне на променливите
- Сравнителен анализ на изч. сложност
- Числени експерименти

Паралелна реализация

Ефективност

Числени експерименти

Методи за разделяне на променливите

Методи за разделяне на променливите

Постановка

Методи

● Методи за разделяне на променливите

● Сравнителен анализ на изч. сложност

● Числени експерименти

Паралелна реализация

Ефективност

Числени експерименти

- Стандартен алгоритъм за разделяне на променливите

$$\mathcal{N}_{SV} \approx 4m^2n + m(5n - 4)$$

- Техника за непълно решаване на задачи с разрежена дясна част

$$\mathcal{N}_{SRHS} \approx m[2(r + d)n + (5n - 4)]$$

- Бърз алгоритъм за разделяне на променливите

$$\mathcal{N}_{FASV} \approx 24nm(\log(m + 1) - 1) - 9nm$$

- Стандартен марш алгоритъм

$$\mathcal{N}_{SM} \approx 31nm$$

- Обобщен марш алгоритъм ($m + 1 = p(k + 1)$)

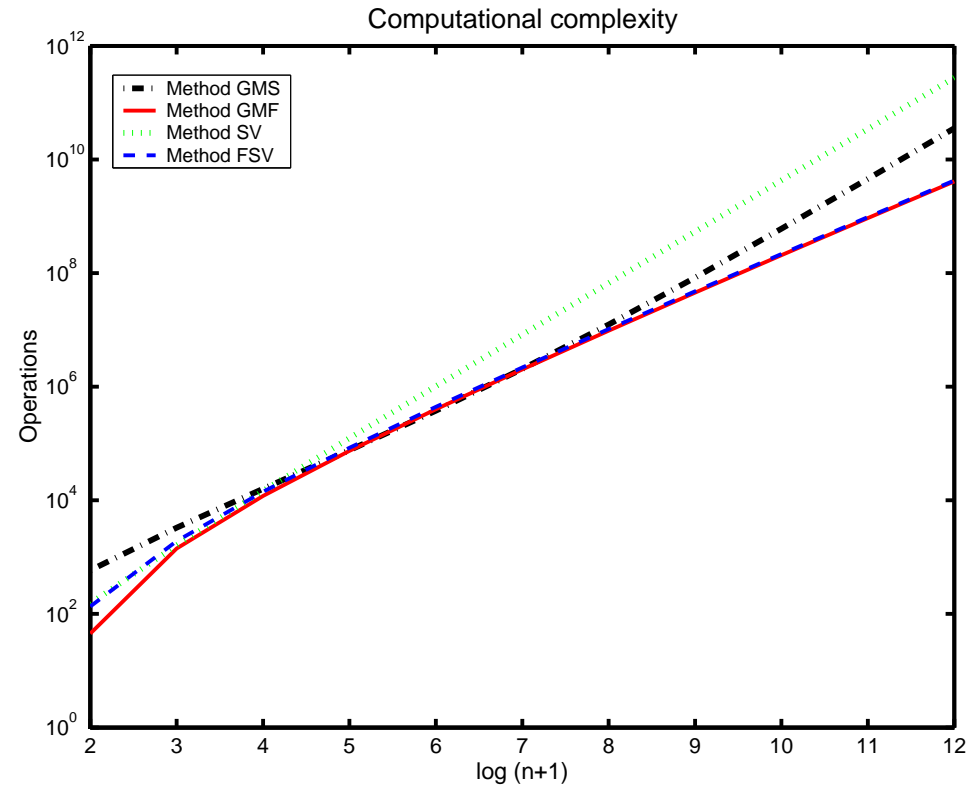
$$\mathcal{N}_{GMF} \approx 62pkn + 24nm(\log(p) - 1) - 9nm$$

$$\mathcal{N}_{GMS} \approx 62pkn + 4pnm + nm \text{ (Г. Бенчева)}$$

Сравнителен анализ на изч. сложност

$$n = m = p(k + 1) - 1; N = n^2$$

Метод	Брой операции
SV	$4n^3 + 5n^2$
FASV	$24n^2 \log_2(n + 1) - 33n^2$
SM	$31n^2$
GMF	$24n^2 \log_2(p) + 29n^2$
GMS	$4pn^2 + 63n^2$



Числени експерименти

Постановка

Методи

- Методи за разделяне на променливите
- Сравнителен анализ на изч. сложност
- Числени експерименти

Паралелна реализация

Ефективност

Числени експерименти

Пример: $a_1(y_1) = 1 + y_1^2$, $a_2(y_2) = e^{-y_2}$,
 $u(y_1, y_2) = (1 - y_1)y_1y_2(1 - y_2)$ и
 $f(y_1, y_2) = 2y_2(1 - y_2)(3y_1^2 - y_1 + 1) + e^{-y_2}y_1(1 - y_1)(3 - 2y_2)$.

Времена за разглежданите алгоритми ($n = p(k + 1) - 1$)

n	SV	FASV	$k = 3$		$k = 7$	
			GMF	GMS	GMF	GMS
63	0.03	0.21	0.21	0.11	0.08	0.06
127	0.29	0.83	0.88	0.47	0.52	0.28
255	3.41	3.77	3.82	2.65	2.23	1.39
511	33.82	16.66	16.44	15.70	9.84	8.40
1023	284.73	69.70	69.45	100.64	42.04	51.39

Постановка

Методи

**Паралелна
реализация**

- Паралелен FASV
- Алгоритъм PFASV
- Паралелен GMA
- Алгоритъм PGM
- Паралелен SRHS
- Паралелни преки алгоритми

Ефективност

Числени
експерименти

Паралелна реализация

Паралелен FASV

Пример: При $l = 4$, $m = 2^4 - 1 = 15$, $N_p = 8$, ненулевите блокове на $\mathbf{f}^{(k)}$, $k = 1, \dots, 4$ се актуализират от процесорите по следния начин:

$$\begin{array}{l}
 1 : \mathbf{f}_1^{(1)} \quad \mathbf{f}_2^{(1)} \quad \mathbf{f}_3^{(1)} \quad \mathbf{f}_4^{(1)} \quad \mathbf{f}_5^{(1)} \quad \mathbf{f}_6^{(1)} \quad \mathbf{f}_7^{(1)} \quad \mathbf{f}_8^{(1)} \quad \mathbf{f}_9^{(1)} \quad \mathbf{f}_{10}^{(1)} \quad \mathbf{f}_{11}^{(1)} \quad \mathbf{f}_{12}^{(1)} \quad \mathbf{f}_{13}^{(1)} \quad \mathbf{f}_{14}^{(1)} \quad \mathbf{f}_{15}^{(1)} \\
 2 : \quad \quad \mathbf{f}_2^{(2)} \quad \quad \mathbf{f}_4^{(2)} \quad \quad \mathbf{f}_6^{(2)} \quad \quad \mathbf{f}_8^{(2)} \quad \quad \mathbf{f}_{10}^{(2)} \quad \quad \mathbf{f}_{12}^{(2)} \quad \quad \mathbf{f}_{14}^{(2)} \\
 3 : \quad \quad \quad \mathbf{f}_4^{(3)} \quad \quad \quad \mathbf{f}_8^{(3)} \quad \quad \quad \mathbf{f}_{12}^{(3)} \\
 4 : \quad \quad \quad \quad \mathbf{f}_8^{(4)}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 P_0 \quad P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4 \quad P_5 \quad P_6 \quad P_7 \\
 P_0 \quad P_2 \quad P_4 \quad P_6 \\
 P_0 \quad P_4 \\
 P_0
 \end{array}$$

Пример: При $l = 4$, $m = 2^4 - 1 = 15$, $N_p = 8$, на всяка стъпка $k = 4, \dots, 1$ се търсят $\mathbf{x}_{(2^s-1)2^{k-1}}$ за $s = 1, 2, \dots, 2^{4-k}$. Решението се възстановява на части по следния начин:

$$\begin{array}{l}
 4 : \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \mathbf{x}_8^0 \\
 3 : \quad \quad \quad \quad \mathbf{x}_4^0 \quad \quad \quad * \quad \quad \quad \quad \quad \mathbf{x}_{12}^4 \\
 2 : \quad \quad \mathbf{x}_2^0 \quad \quad * \quad \quad \mathbf{x}_6^2 \quad \quad * \quad \quad \mathbf{x}_{10}^4 \quad \quad * \quad \quad \mathbf{x}_{14}^6 \\
 1 : \mathbf{x}_1^0 \quad * \quad \mathbf{x}_3^1 \quad * \quad \mathbf{x}_5^2 \quad * \quad \mathbf{x}_7^3 \quad * \quad \mathbf{x}_9^4 \quad * \quad \mathbf{x}_{11}^5 \quad * \quad \mathbf{x}_{13}^6 \quad * \quad \mathbf{x}_{15}^7 \\
 \quad \quad P_0 \quad \quad P_1 \quad \quad P_2 \quad \quad P_3 \quad \quad P_4 \quad \quad P_5 \quad \quad P_8 \quad \quad P_7
 \end{array}$$

Алгоритъм PFASV

Стъпка 1. Прав ход:

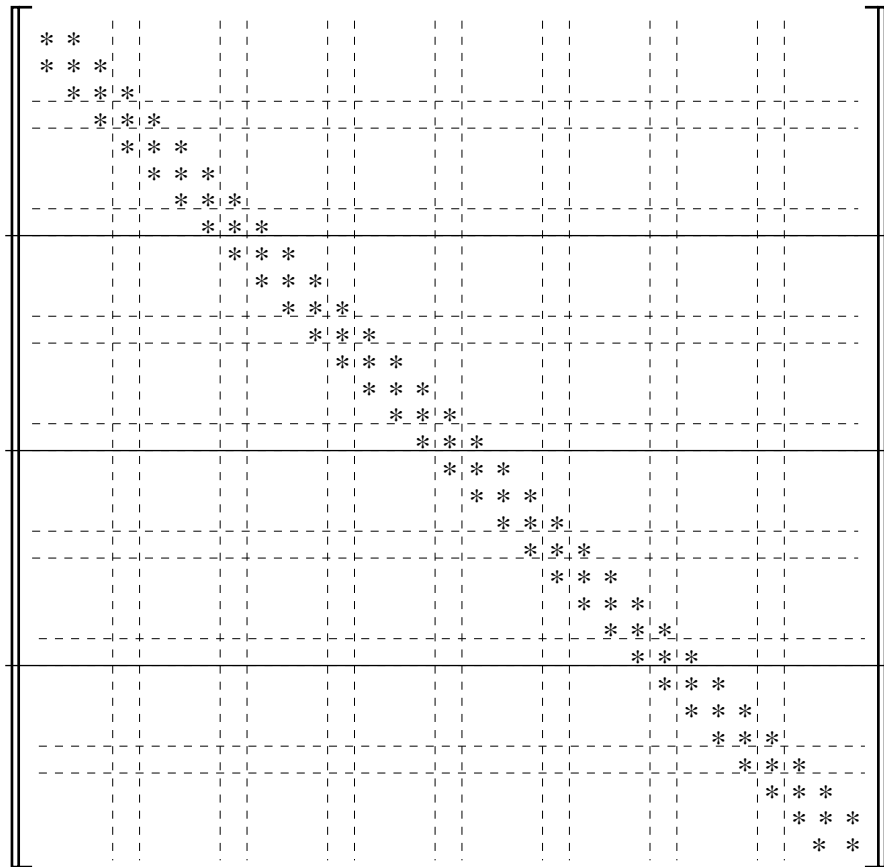
```
for  $k = 1$  to  $l - n_p$ 
    решават се  $2^{l-k-n_p}$  системи с  $A^{(k,s)}$  чрез SRHS;
    комуникации one_to_one: 1 вектор от ред  $n$  за пресмятане на  $\mathbf{f}^{(k+1)}$ ;
end {цикъл по  $k$ }
for  $k = l - n_p + 1$  to  $l - 1$ 
    решава се 1 система с  $A^{(k,s)}$  чрез PSRHSF;
    комуникации one_to_one: 2 вектора от ред  $n$  за пресмятане на  $\mathbf{f}^{(k+1)}$ ;
end {цикъл по  $k$ }
```

Стъпка 2. Обратен ход:

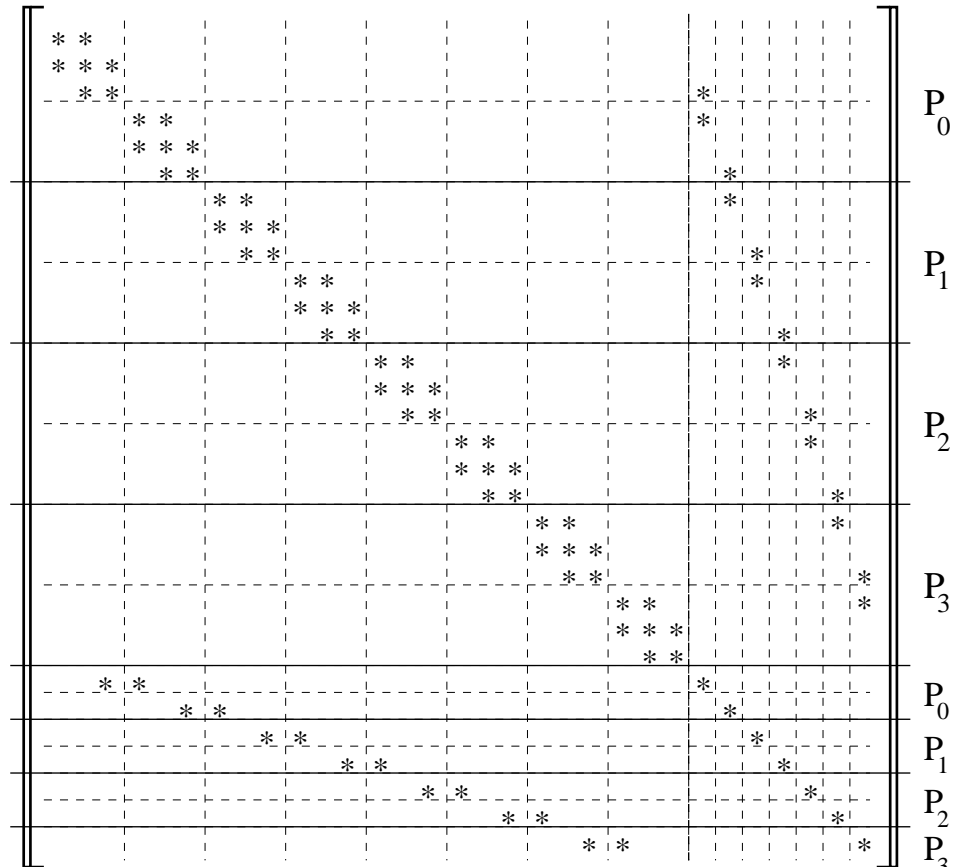
```
for  $k = l$  downto  $l - n_p + 1$  ( $i = l - k + 1$ )
    решава се 1 система с  $A^{(k,s)}$  чрез PSRHSF;
    комуникации one_to_one: 1 вектор от ред  $n$  на  $n_p - i$  процесора;
end {цикъл по  $k$ }
for  $k = l - n_p$  downto 1
    решават се  $2^{l-k-n_p}$  системи с  $A^{(k,s)}$  чрез SRHS;
    НЯМА комуникации
end {цикъл по  $k$ }
```

Паралелен GMA

Структура на матриците A и \tilde{A} и разпределение между процесорите в случая $p = 8, k = 3, m = p(k + 1), N_p = 4$.



A



\tilde{A}

Алгоритъм PGM

Постановка

Методи

Паралелна
реализация

- Паралелен FASV
- Алгоритъм PFASV
- Паралелен GMA
- Алгоритъм PGM
- Паралелен SRHS
- Паралелни преки алгоритми

Ефективност

Числени
експерименти

Стъпка 1: решаване на $\frac{p}{N_p}$ системи с $A_s^{(k)}$ чрез Алгоритъм SM;
комуникации one_to_one: 1 вектор от ред n ;
пресмятане на $\tilde{\mathbf{f}}^{(2)}$;

Стъпка 2: Непълно решаване на $A\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{f}}$ чрез:
Алгоритъм PSRHS (за PGMS) или
Алгоритъм PFASV (за PGMF);

Стъпка 3: комуникации one_to_one: 1 вектор от ред n ;
пресмятане на $\tilde{\mathbf{f}}^{(1)}$;
решаване на $\frac{p}{N_p}$ системи с $A_s^{(k)}$ чрез Алгоритъм SM;

Паралелен SRHS

Постановка

Методи

Паралелна реализация

- Паралелен FASV
- Алгоритъм PFASV
- Паралелен GMA
- Алгоритъм PGM
- Паралелен SRHS
- Паралелни преки алгоритми

Ефективност

Числени експерименти

Алгоритъм PSRHSF

Стъпка 0: Намиране на $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n_k}$ и на необходимите $\tilde{d} \leq d + r$ компоненти $\{q_{i,j}\}$, $j \in \{j_1, \dots, j_d\} \cup \{j'_1, \dots, j'_r\}$ от всички собствени вектори $\{\mathbf{q}_i\}_{i=1}^{n_k}$ на тридиагоналната матрица $B_k^{(s)}$ (предварителен етап);

Стъпка 1: Комуникации:

one_to_all broadcast за $\mathbf{f}_j, j = j_1, \dots, j_d$;

Стъпка 2: Изпълняват се Стъпки 1, 2 и 3 на SRHS с $\tilde{m} = \frac{n_k}{\tilde{P}}$

и $\mathbf{q}_i^{P_s}, \lambda_i^{P_s}, \beta_i^{P_s}, \eta_i^{P_s}$, като се намират $\mathbf{x}_j^{P_s}, j = j'_1, j'_2, \dots, j'_r$;

Стъпка 3: Комуникации:

all_to_one reduce за $\mathbf{x}_j^{P_s}$: $\mathbf{x}_j = \sum_{s=0}^{\tilde{P}-1} \mathbf{x}_j^{P_s}, j = j'_1, j'_2, \dots, j'_r$

Край {PSRHSF}.

Паралелен SRHS – Алгоритъм PSRHS

Стъпка 0: Намиране на $\lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^m$ и на необходимите $\tilde{d} \leq d + r$ компоненти $\{q_{i,j}\}$, $j \in \{j_1, \dots, j_d\} \cup \{j'_1, \dots, j'_r\}$ от всички собствени вектори $\{\mathbf{q}_i\}_{i=1}^m$ на тридиагоналната матрица B (предварителен етап);

Стъпка 1: Намиране на коефициентите на Фурие $\beta_{i,j}$ чрез:

Изчисления: $\beta_{i,j}^{(Pr)} = \sum_{s=1}^{d(Pr)} q_{j_s,j} f_{i,j_s}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$;

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \frac{P_0}{P_1} \\ \frac{P_1}{P_2} \\ \frac{P_2}{P_3} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \end{array} \right).$$

Комуникации:
all_to_all reduce_scatter за β_j ;

$F_{n \times d}$ $Q_{d \times m}$ $Beta_{n \times m}$

Стъпка 2: решаване на $(\lambda_j I_n + T) \eta_j = \beta_j$, $j = 1, \dots, \frac{m}{N_p}$;

Стъпка 3: възстановяване на \mathbf{x}_j , $j = j'_1, j'_2, \dots, j'_r$ чрез:

Изчисления: $\mathbf{x}_j^{(Pr)} = \sum_{i=1}^{\tilde{m}} q_{j,i} \eta_i$, $j = j'_1, \dots, j'_r$, $\tilde{m} = \frac{m}{N_p}$;

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \frac{P_0}{P_1} \\ \frac{P_1}{P_2} \\ \frac{P_2}{P_3} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \frac{P_0}{P_1} \\ \frac{P_1}{P_2} \\ \frac{P_2}{P_3} \end{array} \right).$$

Комуникации:
all_to_all reduce_scatter за \mathbf{x}_j

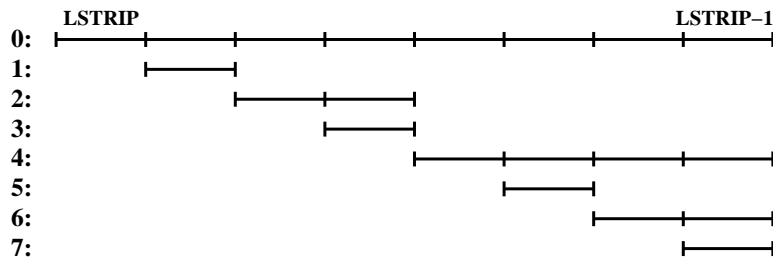
$Q_{r \times m}$ V_m X_r

Паралелни преки алгоритми

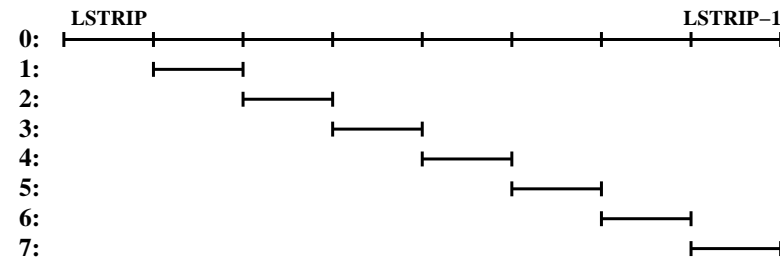
PFASV(PSRHSF), PGMF(PFASV), PGMS(PSRHSG)

$N = n m$, $m = 2^l - 1 = p(k + 1)$, N_p – брой на процесорите

1. Данни – областта се разделя на N_p хоризонтални ивици



а) PFASV, PGMF



б) PGMS

2. Изчисления – разпределени са по равно между процесорите

3. Комуникации:

PSRHS – глобални;

PFASV – част от стъпките – локални;

останалите стъпки – one_to_one + глобални за група процесори (PSRHSF);

PGMF – 2 стъпки – локални;

1 стъпка – глобални + локални (PFASV);

PGMS – 2 стъпки – локални; 1 стъпка – глобални (PSRHSG)

Постановка

Методи

Паралелна
реализация

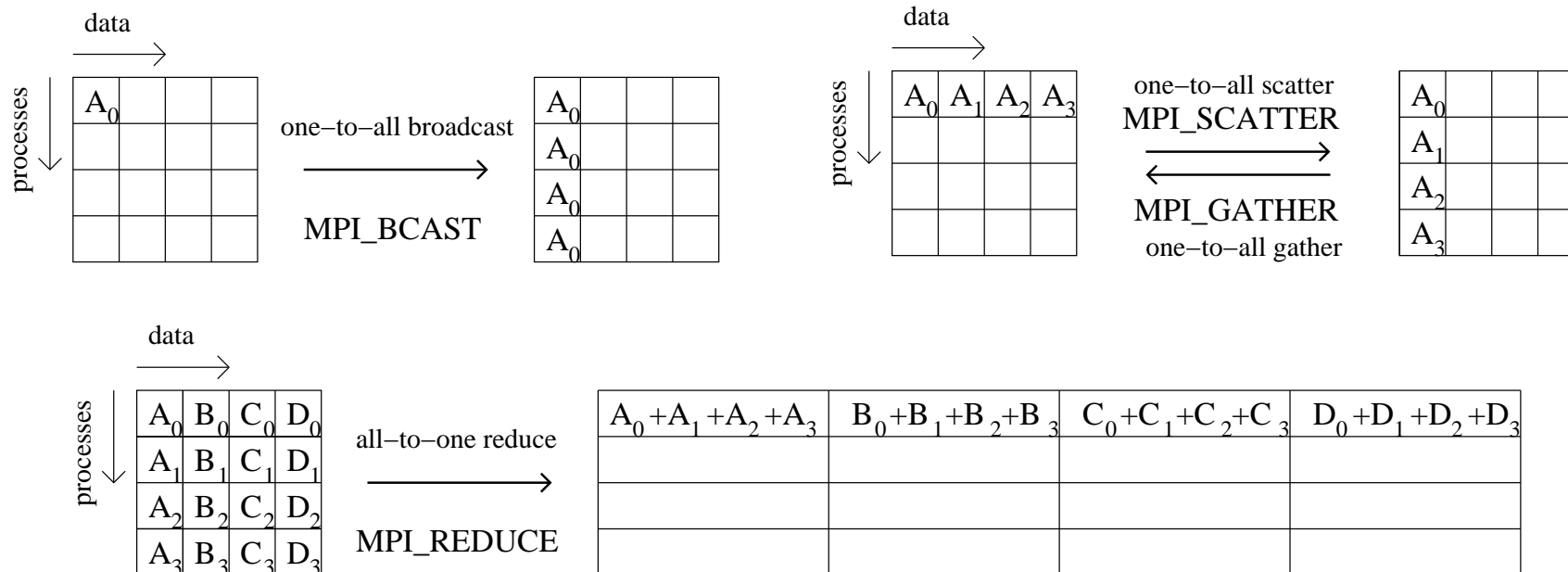
Ефективност

- Базови комуникации
- Оценки на паралелните времена
- Коефициенти пред t_s и t_w
- Времена за комуникации като функция на $\frac{t_s}{t_w}$

Числени
експерименти

Оценки на паралелните времена и ускорения

Базови комуникации



	пръстен	квадратна мрежа	хиперкуб
$oo(P, M)$	$t_s + t_w \cdot M \cdot \lfloor P/2 \rfloor$	$t_s + 2t_w \cdot M \cdot \lfloor \sqrt{P}/2 \rfloor$	$t_s + t_w \cdot M \cdot \log P$
$b(P, M)$	$(t_s + t_w \cdot M) \lfloor P/2 \rfloor$	$2(t_s + t_w \cdot M) \lfloor \sqrt{P}/2 \rfloor$	$(t_s + t_w \cdot M) \log P$
$s(P, M)$	$(t_s + t_w \cdot M)(P - 1)$	$2t_s(\sqrt{P} - 1) + t_w \cdot M \cdot (P - 1)$	$t_s \log P + t_w \cdot M \cdot (P - 1)$

Оценки на паралелните времена

$$T^{Alg}(N_p, m) = T_a^{Alg}(N_p, m) + T_{com}^{Alg}(N_p, m), \quad T_a^{Alg} = \frac{\mathcal{N}_{Alg}}{N_p} * t_a$$

Теорема 3.3.1 PSRHSF и PSRHSG:

$$T_{com}^{psf}(N_p, m, r, d) = b(N_p, d.n) + b(N_p, r.n),$$

$$T_{com}^{psg}(N_p, m, r, d) = b(N_p, m.n) + s(N_p, \frac{m}{N_p}n) + b(N_p, r.n) + s(N_p, \frac{r}{N_p}n).$$

Теорема 3.3.2 PFASV:

$$T_{com}^{pfasv}(N_p, m) \leq (l - n_p)(t_s + n * t_w) + T_{com}^{psf}(2^{n_p}, m, 1, 1) + n_p oo(2^{n_p}, n) \\ + \sum_{j=1}^{n_p-1} (T_{com}^{psf}(2^j, \hat{m}, 3, 1) + T_{com}^{psf}(2^j, \hat{m}, 1, 2) + (2 + j) oo(2^j, n)).$$

Теорема 3.3.3 PGMF и PGMS:

$$T_{com}^{pgmf}(N_p, m) \leq (l_p - n_p + 2)(t_s + n * t_w) + T_{com}^{psf}(2^{n_p}, m, 1, 1) + n_p oo(2^{n_p}, n) \\ + \sum_{j=1}^{n_p-1} (T_{com}^{psf}(2^j, \hat{m}, 3, 1) + T_{com}^{psf}(2^j, \hat{m}, 1, 2) + (2 + j) oo(2^j, n)),$$

$$T_{com}^{pgms}(N_p, m) \leq 2(t_s + n * t_w) + T_{com}^{psg}(N_p, m, p - 1, p - 1).$$

Постановка

Методи

Паралелна реализация

Ефективност

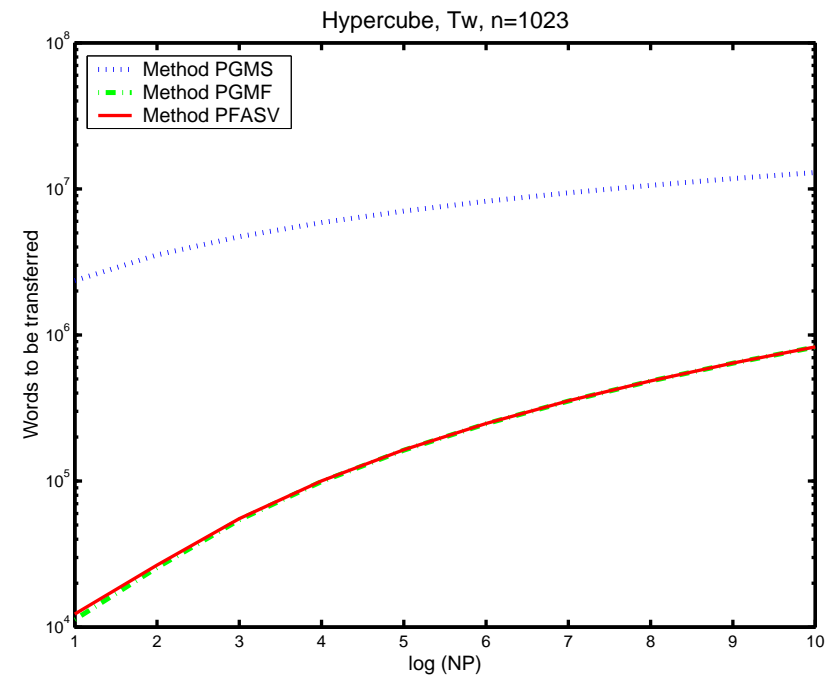
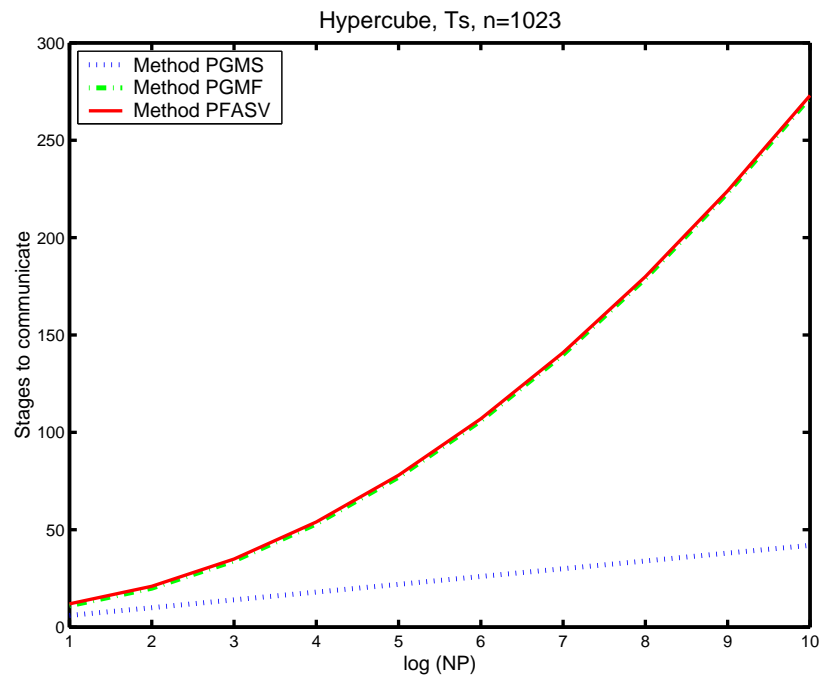
- Базови комуникации
- **Оценки на паралелните времена**
- Коэффициенти пред t_s и t_w
- Времена за комуникации като функция на $\frac{t_s}{t_w}$

Числени експерименти

Коефициенти пред t_s и t_w

$$T_{com} \leq T_s * t_s + T_w * t_w$$

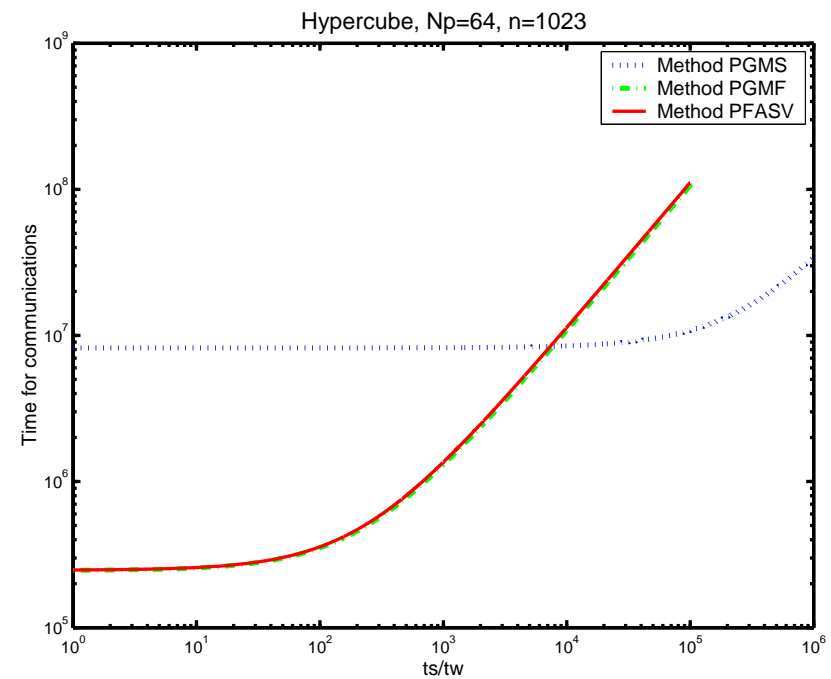
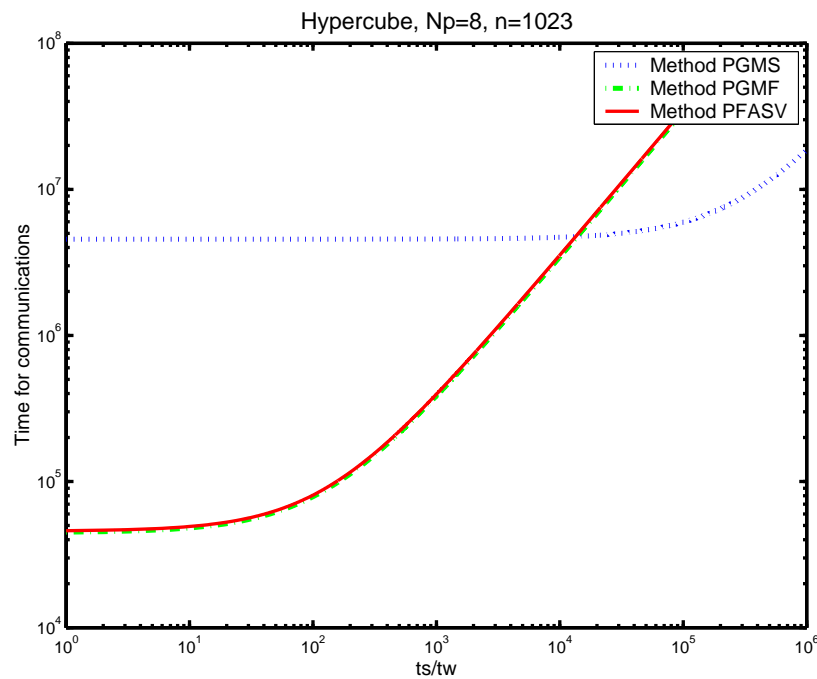
Хиперкуб при $k = 7, n = 1023$



Времена за комуникации като функция на $\frac{t_s}{t_w}$

$$T_{com} \leq T_s * t_s + T_w * t_w$$

Хиперкуб при $k = 7, n = 1023$



Постановка

Методи

Паралелна
реализация

Ефективност

Числени
експерименти

- Паралелни системи
- Grendel
- Beowulf
- Parmac
- Сравнение на PGMF и PGMS
- Blue

Числени експерименти

Паралелни системи

Постановка

Методи

Паралелна реализация

Ефективност

Числени експерименти

● Паралелни системи

● Grendel

● Beowulf

● Parmac

● Сравнение на PGMF и PGMS

● Blue

Parmac – клъстер от 4 двупроцесорни Power Macintosh компютри, свързани чрез Bay Stack 350 суич. Всеки възел има 512 MB RAM и два процесора Power PC G4/450MHz (ИПОИ – БАН).

Beowulf – клъстер от 16 работни станции Digital (Compaq) Personal Workstations 500au свързани със 100Mbps switched Ethernet. Всеки възел е с един процесор EV56 на 500MHz и 128 MB RAM (TAMU, USA).

Grendel – Silicon Graphics Origin 2000 с 8 процесора R10000 на 250 MHz, 4 MB L2 кеш и 4GB RAM (TAMU, USA).

Blue – IBM SP (ASCI Blue) 5 с 336 възела и обща памет 512GB SDRAM. Всеки възел има 1536MB SDRAM и по 4 Power PC 604e процесора на 332MHz (LLNL, USA).

При Parmac – два начина на разпределение на процесите върху възлите, осигурени от опцията N на „mpirun“.

Резултати върху Grendel, $k = 7, n = m$

n	N_p	PFASV			PGMF			PGMS		
		T_{N_p}	S_{N_p}	E_{N_p}	T_{N_p}	S_{N_p}	E_{N_p}	T_{N_p}	S_{N_p}	E_{N_p}
255	2	2.47	–	–	1.60	–	–	1.07	–	–
	4	1.42	1.74	0.87	0.89	1.80	0.90	0.63	1.70	0.85
	8	1.08	2.29	0.57	0.65	2.46	0.62	0.37	2.89	0.72
511	2	16.86	–	–	10.52	–	–	7.59	–	–
	4	8.85	1.91	0.96	5.73	1.84	0.92	3.95	1.92	0.96
	8	4.98	3.39	0.85	3.28	3.21	0.80	2.24	3.39	0.85
1023	2	79.59	–	–	49.53	–	–	50.96	–	–
	4	41.63	1.91	0.96	26.13	1.90	0.95	24.00	2.12	1.06
	8	29.38	2.71	0.68	16.19	3.06	0.77	12.49	4.08	1.02

Резултати върху Veowulf, $k = 7$.

n	N_p	PFASV			PGMF			PGMS		
		T_{N_p}	S_{N_p}	E_{N_p}	T_{N_p}	S_{N_p}	E_{N_p}	T_{N_p}	S_{N_p}	E_{N_p}
255	2	8.94	—	—	6.31	—	—	2.29	—	—
	4	3.90	2.29	1.15	2.72	2.32	1.16	1.74	1.32	0.66
	8	2.31	3.87	0.97	1.55	4.07	1.02	1.11	2.06	0.52
511	2	47.52	—	—	36.02	—	—	13.28	—	—
	4	23.40	2.03	1.02	17.83	2.02	1.01	8.51	1.56	0.78
	8	15.44	3.07	0.77	13.35	2.70	0.67	8.14	1.63	0.41
1023	2	271.13	—	—	227.04	—	—	89.46	—	—
	4	165.57	1.64	0.82	148.74	1.53	0.77	50.45	1.77	0.89
	8	126.88	2.14	0.53	125.18	1.81	0.45	41.07	2.18	0.55

Резултати върху Parmas, $k = 7$.

n	N_p	PFASV			PGMF			PGMS		
		T_{N_p}	S_{N_p}	E_{N_p}	T_{N_p}	S_{N_p}	E_{N_p}	T_{N_p}	S_{N_p}	E_{N_p}
255	2	2.36	–	–	1.34	–	–	0.68	–	–
	4	1.30	1.82	0.91	0.74	1.81	0.91	0.54	1.26	0.63
	8	0.73	3.23	0.81	0.51	2.63	0.66	0.54	1.26	0.32
511	2	10.12	–	–	5.82	–	–	4.02	–	–
	4	5.34	1.90	0.95	3.11	1.87	0.94	2.54	1.58	0.79
	8	3.11	3.25	0.81	1.80	3.23	0.81	2.25	1.79	0.45
1023	2	42.14	–	–	25.16	–	–	25.44	–	–
	4	22.88	1.84	0.92	13.33	1.89	0.95	15.08	1.69	0.85
	8	11.96	3.52	0.88	7.54	3.34	0.84	12.06	2.11	0.53

Резултати върху Parmas(N), $k = 7$.

n	N_p	PFASV			PGMF			PGMS		
		T_{N_p}	S_{N_p}	E_{N_p}	T_{N_p}	S_{N_p}	E_{N_p}	T_{N_p}	S_{N_p}	E_{N_p}
255	2	1.86	–	–	1.06	–	–	0.62	–	–
	4	1.00	1.86	0.93	0.60	1.77	0.89	0.57	1.09	0.55
	8	0.73	2.55	0.64	0.50	2.12	0.53	0.55	1.13	0.28
511	2	7.97	–	–	4.70	–	–	3.52	–	–
	4	4.43	1.80	0.90	2.61	1.80	0.90	2.56	1.38	0.69
	8	2.95	2.70	0.68	1.96	2.40	0.60	2.32	1.52	0.38
1023	2	33.57	–	–	22.14	–	–	23.16	–	–
	4	17.45	1.92	0.96	10.76	2.06	1.03	14.74	1.57	0.79
	8	11.86	2.83	0.71	7.21	3.07	0.77	11.51	2.01	0.50

Сравнение на PGMF и PGMS върху Parmac, $k = 7$.

l	N_p	T_{N_p}	PGMF				PGMS					
			T_r	T_{s2}	T_r^c	T_{s2}^c	T_{N_p}	T_r	T_{s2}	T_r^c	T_{s2}^c	
Parmac												
9	2	5.82	2.46	3.36	0.01	0.02	4.02	2.45	1.57	0.01	0.14	
	4	3.11	1.22	1.89	0.01	0.15	2.54	1.21	1.33	0.01	0.95	
	8	1.80	0.61	1.19	0.01	0.07	2.25	0.65	1.60	0.05	1.47	
10	2	25.16	10.26	14.90	0.02	0.01	25.44	10.27	15.17	0.02	0.45	
	4	13.33	5.08	8.25	0.02	0.28	15.08	5.09	9.99	0.01	3.73	
	8	7.54	2.52	5.02	0.01	0.68	12.06	2.68	9.38	0.19	6.83	
Parmac(N)												
9	2	4.70	1.92	2.78	0.01	0.02	3.52	1.91	1.61	0.01	0.43	
	4	2.61	1.07	1.54	0.13	0.04	2.56	0.96	1.60	0.02	1.27	
	8	1.96	0.61	1.35	0.01	0.23	2.32	0.63	1.69	0.04	1.54	
10	2	22.14	8.16	13.98	0.02	0.82	23.16	8.16	15.00	0.03	1.85	
	4	10.76	4.00	6.76	0.02	0.40	14.74	4.00	10.74	0.02	5.31	
	8	7.21	2.49	4.72	0.07	0.42	11.51	2.62	8.89	0.15	6.54	

Резултати върху Blue, $k = 7$, $m = n = 1023$

Постановка
Методи
Паралелна реализация
Ефективност
Числени експерименти
<ul style="list-style-type: none"> ● Паралелни системи ● Grendel ● Beowulf ● Parmac ● Сравнение на PGMF и PGMS ● Blue

N_p	PFASV		PGMF		PGMS	
	T_{N_p}	E_{N_p}	T_{N_p}	E_{N_p}	T_{N_p}	E_{N_p}
4	131.36	—	64.77	—	40.12	—
8	97.93	0.67	40.93	0.79	19.99	1.00
16	80.79	0.41	29.47	0.55	12.27	0.82
32	79.61	0.21	21.70	0.37	5.73	0.88
64	57.73	0.14	10.63	0.38	3.23	0.78
128	46.46	0.09	12.35	0.16	3.33	0.38

Резултати върху Blue – фиксирана ивица.

$$m_l = 16, m + 1 = N_p * m_l$$

Постановка	n	m	N_p	PFASV	PGMF		PGMS	
					$k = 3$	$k = 7$	$k = 3$	$k = 7$
Паралелна реализация	511	63	4	2.96	2.90	1.60	1.36	0.73
		127	8	3.59	3.33	2.02	1.42	0.78
		255	16	4.73	3.82	2.51	1.62	0.92
		511	32	16.89	8.04	3.45	2.02	1.18
		1023	64	53.01	13.21	5.25	2.27	1.65
Числени експерименти	1023	2047	128	119.22	36.21	21.56	3.91	2.64
		63	4	7.39	6.24	3.26	2.73	1.49
		127	8	10.90	8.01	4.07	2.87	1.61
		255	16	17.48	10.79	5.53	3.22	1.92
		511	32	31.57	15.91	6.91	3.83	2.36
		1023	64	59.91	27.40	9.08	4.43	4.10
		2047	128	216.12	48.40	15.66	7.38	5.16

- Паралелни системи
- Grendel
- Beowulf
- Parmac
- Сравнение на PGMF и PGMS
- Blue