7

ИИКТ - БАН

eISSN: 2367-8666

Лекции по компютърни науки и технологии

Елементи от анализа и управлението на портфейлния риск

Практическо ръководство

Иван Попчев   Милена Петкова   Стоян Златев

eISBN: 978-619-7320-04-6

Поредицата „**Лекции по компютърни науки и технологии на Института по информационни и комуникационни технологии при Българската академия на науките**“ публикува в електронен вид учебници и учебни помагала, предназначени за студенти и докторанти по различни програми по информатика, изчислителна математика, математическо моделиране, комуникационни технологии, и др., както и за всички читатели, интересуващи се от тези научни области. Учебниците се базират върху курсове лекции, водени от учени на Института по информационни и комуникационни технологии – БАН в различни български университети и в Центъра за обучение на докторанти в БАН. Публикуваните материали са с отворен достъп - те са свободно достъпни без заплащане.

Редактори

Геннадий Агре (Главен редактор) – ИИКТ-БАН
e-mail: agre@iinf.bas.bg

Вера Ангелова – ИИКТ-БАН
e-mail: vangelova@iit.bas.bg

Пенчо Маринов – ИИКТ-БАН
e-mail: pencho@bas.bg

eISSN: 2367-8666

Съдържание

Предговор

Ръководството е развитие и практическо приложение на основни теми от учебника "1/2016: Иван Попчев. Шест теми по управление на риска. ЛКНТ № 1, ИИКТ-БАН, 2016р eISSN: 2367-8666, eISBN: 978-954-91700-8-5, 73 стр. http://parallel.bas.bg/lcst/2016/01-2016-I_Popchev_1.pdf

Акцентът в практическото ръководство е поставен върху отделни елементи от анализа и управлението на портфейл от финансови активи. Използван е основно подходът на Х. Марковиц за портфейл от три и повече активи с дадени възвръщаемости и дисперсионно - ковариацонна матрица. Идеята на авторите е да се прецизират от практическа гледна точка съществуващите резултати в общата теория, а именно:

1. Определяне структурата и възвръщаемостта на портфейла при абсолютен минимум на неговата дисперсия.

2. Изразяване на минималната дисперсия на портфейла относно дяловите участия на съставящите го активи $(\min \sigma_p^2|_{x_i})$ като квадратна функция на възвръщаемостта му R_p, графично изобразяване.

3. Определяне точните граници на R_p в случай 2, гарантиращи участието на всички активи в портфейла. Намиране на $\min(\min \sigma_p^2|_{x_i})$ по R_p, т.е. абсолютния $\min \sigma_p^2$, ако съществува или определяне монотонността на $\min \sigma_p^2|_{x_i}$ по R_p и намиране $\inf(\min \sigma_p^2|_{x_i})$ и $\sup(\min \sigma_p^2|_{x_i})$ по R_p.

Решаването на задачите в смисъла на горните точки 2. и 3. позволява да се намери $\min \sigma_p^2|_{x_i}$ и структурата на портфейла за всяка допустима стойност на R_p. Освен това се определят точните стойности на R_p, при които портфейлът се редуцира до по-малък брой активи.

Предложеният материал е практическо ръководство по дисциплината "Анализ на риска", която се преподава на бакалаври от Факултета по икономически и социални науки към Пловдивския университет "Паисий Хилендарски" и неговите филиали в Кърджали и Смолян за следните специалности: III курс "Стопанско управление", "Маркетинг", "Финанси", "Макроикономика", "Счетоводство" и "Международни икономически отношения". Хорариумът за всички специалности е по 30 часа лекции и 30 часа упражнения.

Практическото ръководство се използва и по дисциплината "Управление на риска" в магистърските програми "Финансов мениджмънт", "Финанси и застраховане", както и от докторанти и специализанти на Факултета по икономически и социални науки към Пловдивския университет "Паисий Хилендарски".

1. Портфейл от купонни облигации

Съставен е портфейл от m вида купонни облигации $O_1, O_2, \ldots, O_m$ $(m \geq 2)$, чиито параметри са дадени в следната таблица:

Вид	Брой	Падеж	Куп.лих.%	Номин.	Покуп. цена	Прод. цена
O_1	n_1	d_1	i_{01}	S_{01}	V_1	F_1
O_2	n_2	d_2	i_{02}	S_{02}	V_2	F_2
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
O_m	n_m	d_m	i_{0m}	S_{0m}	V_m	F_m

С помощта на тези параметри определяме:
а) Вътрешната норма на възвръщаемост на всеки вид облигация

$$IRR_j = \frac{i_{0j}\, S_{0j} + \dfrac{S_{0j} + V_j}{d_j}}{\dfrac{S_{0j} + V_j}{2}}, \qquad 1 \leq j \leq m.$$

б) Пълната номинална стойност на портфейла

$$TNV = \sum_{j=1}^{m} S_{0j} n_j.$$

в) Пълната пазарна стойност на портфейла

$$TMV = \sum_{j=1}^{m} V_j n_j.$$

г) Дяловото участие на всеки вид облигация в портфейла по номинал

$$k_j^{(S_0)} = \frac{S_{0j} n_j}{TNV}$$

и по покупна цена

$$k_j^{(V)} = \frac{V_j n_j}{TMV}.$$

Така намираме вътрешната норма на възвръщаемост на портфейла по номинал

$$IRR_p^{(S_0)} = \sum_{j=1}^{m} IRR_j k_j^{(S_0)}$$

и по покупна цена

$$IRR_p^{(V)} = \sum_{j=1}^{m} IRR_j k_j^{(V)}.$$

Емпиричните дисперсии на вътрешните норми на възвръщаемост на портфейла по номинал и по покупна цена съответно са

$$(\sigma_p^2)^{(S_0)} = \sum_{j=1}^{m} \left(IRR_j - IRR_p^{(S_0)}\right)^2 k_j^{(S_0)} \quad \text{и} \quad (\sigma_p^2)^{(V)} = \sum_{j=1}^{m} \left(IRR_j - IRR_p^{(V)}\right)^2 k_j^{(V)}.$$

Те са количествена мярка на портфейлния риск.

По-нататък, за всяка от годините от една до $l = \max\limits_{j=\overline{1,m}} d_j$, определяме паричния поток $CF_p^{(q)} = \sum\limits_{j=1}^{m} i_{0j} S_{0j} n_j$ $(1 \leq q \leq l)$ до минималния падеж q. На падежите, към сумата вдясно се прибавя и прихода $F_j n_j$ $(1 \leq q \leq l)$ от продажбата (обратното изкупуване от страна на емитента) на съответния вид облигация. Общият паричен поток за тези l години е $CF_p = \sum\limits_{q=1}^{l} CF_p^{(q)}$. Делът на облигацията O_j $(1 \leq q \leq l)$ в общия паричен поток е $k_j^{CF} = \frac{CF_j}{CF_p}$, където CF_j е общият приход от O_j за периода от 1 до d_j години, а $CF_p = \sum\limits_{j=1}^{m} CF_j$.

При желана годишна норма на възвръщаемост (норма на дисконтиране) r нетния паричен поток на портфейла е

$$NPV(r) = -TMV + \sum_{q=1}^{l} \frac{CF_p^{(q)}}{(1+r)^q}.$$

Третият вид вътрешна норма на възвръщаемост на портфейла по паричен поток $IRR_p^{(CF)}$ е онази стойност на желаната норма на възвръщаемост r, при която нетният паричен поток става равен на нула, т. е. дисконтираният паричен поток става равен на пълната пазарна стойност на портфейла:

$$TMV = \sum_{q=1}^{l} \frac{CF_p^{(q)}}{(1 + IRR_p^{CF})^q}.$$

Понеже $NPV(r)$ е намаляваща функция на r и $\lim\limits_{r\to\infty} NPV(r) = -V$, то необходимото и достатъчно условие за съществуване на $IRR_p^{CF} > 0$ е

$$NPV(0) = \sum_{q=1}^{l} CF_p^{(q)} - TMV > 0.$$

При големи стойности на l ($l \geq 3$) определянето на $IRR_p^{(CF)}$ става компютърно при наличие на съответна програма за решаване на нелинейни алгебрични уравнения от степен по-голяма от две. При липса на възможност за компютърно намиране на $IRR_p^{(CF)}$, това може да се извърши с помощта на подходящ калкулатор или телефон чрез последователни приближения $r_k, k = 1, 2, \ldots$ по метода на хордите

$$r_{k+1} = \frac{r_k NPV(r_{k-1}) - r_{k-1} NPV(r_k)}{NPV(r_{k-1}) - NPV(r_k)},$$

или по метода на допирателните (метод на Нютон)

$$x_k = x_{k-1} - \frac{NPV(x_{k-1})}{NPV'(x_{k-1})}, \tag{1}$$

където $x = \dfrac{1}{1+r}$.

Тук началните приближения r_0 и r_1 са положителни числа, близки до $IRR_p^{(S_0)}$ и $IRR_p^{(V)}$. По първия метод за $IRR_p^{(CF)}$ се приема онази стойност r_n, за която $r_{n+1} = r_n$ с точност 10^{-s}, където s е определено от изследователя естествено число. По втория метод процесът се прекратява при $x_n = x_{n-1}$ със същата точност и $IRR_p^{(CF)} = x_n^{-1} - 1$. Ще отбележим, че методът на Нютон е малко по-бърз от метода на хордите.
ПРИМЕР: Съставен е портфейл от четири вида купонни облигации със следните параметри:

Вид	Брой	Падеж	Куп.лих.%	Номин.	Покуп. цена	Прод. цена
O_1	100	2	$0,05$	100	90	95
O_2	200	3	$0,06$	200	194	198
O_3	300	4	$0,07$	300	304	300
O_4	400	5	$0,08$	400	410	390

Да се определят трите вътрешни норми на възвръщаемост на портфейла.
а) За вътрешната норма на възвръщаемост на всеки вид облигация получаваме

$$IRR_1 = \frac{0,05.100 + \frac{100-90}{2}}{\frac{100+90}{2}} = \frac{2}{19}; \quad IRR_2 = \frac{0,06.200 + \frac{200-194}{3}}{\frac{200+194}{2}} = \frac{14}{197};$$

$$IRR_3 = \frac{0,07.300 + \frac{300-304}{4}}{\frac{300+304}{2}} = \frac{10}{151}; \quad IRR_4 = \frac{0,08.400 + \frac{400-410}{5}}{\frac{400+410}{2}} = \frac{2}{27}.$$

б) Пълната номинална стойност на портфейла е

$$TNV = 100^2 + 200^2 + 300^2 + 400^2 = 300000.$$

в) Пълната пазарна стойност на портфейла е

$$TMV = 100.90 + 200.194 + 300.304 + 400.410 = 303000.$$

г) Дяловите участия на видовете облигации в портфейла по номинал и покупна цена съответно са

$$k_1^{(S_0)} = \frac{100^2}{300000} = \frac{1}{30}; \quad k_2^{(S_0)} = \frac{200^2}{300000} = \frac{2}{15}; \quad k_3^{(S_0)} = \frac{300^2}{300000} = \frac{3}{10}; \quad k_4^{(S_0)} = \frac{400^2}{300000} = \frac{8}{15}$$

$$k_1^{(V)} = \frac{100.90}{303000} = \frac{3}{101}; \quad k_2^{(V)} = \frac{200.194}{303000} = \frac{194}{1515}; k_3^{(V)} = \frac{300.304}{303000} = \frac{30,4}{101}; k_4^{(V)} = \frac{400.410}{303000} = \frac{164}{303}.$$

Вътрешните норми на портфейла по номинал и покупна цена съответно са:

$$IRR_p^{(S_0)} = \frac{2}{19}.\frac{1}{30} + \frac{14}{197}.\frac{2}{15} + \frac{10}{151}.\frac{3}{10} + \frac{2}{27}.\frac{8}{15} = 0,072357959 \approx 7,2358\%,$$

$$IRR_p^{(V)} = \frac{2}{19}.\frac{3}{101} + \frac{14}{197}.\frac{194}{1515} + \frac{10}{151}.\frac{30,4}{101} + \frac{2}{27}.\frac{164}{303} = 0,072252845 \approx 7,2253\%.$$

Паричните потоци за петте години, приходите от четирите вида облигации и съответния им дял от общия приход са дадени в следната таблица:

Година	O_1	O_2	O_3	O_4	Общо
1	500	2400	6300	12800	22000
2	10000	2400	6300	12800	31500
3	–	42000	6300	12800	61100
4	–	–	96300	12800	109100
5	–	–	–	168800	168800
Общо	10500	46800	115200	220000	392500
Дял	$k_1^{CF} = \frac{21}{785}$	$k_2^{CF} = \frac{93,6}{785}$	$k_3^{CF} = \frac{230,4}{785}$	$k_4^{CF} = \frac{440}{785}$	

Нетният паричен поток на портфейла е

$$NPV(r) = -303000 + \frac{22000}{1+r} + \frac{31500}{(1+r)^2} + \frac{61100}{(1+r)^3} + \frac{109100}{(1+r)^4} + \frac{168800}{(1+r)^5}.$$

Третата норма на възвръщаемост на портфейла $IRR_p^{(CF)}$ съществува поради неравенството

$$NPV(0) = 22000 + 31500 + 61100 + 109100 + 168800 - 303000 = 89500 > 0.$$

Най-напред ще използваме последователни приближения $r_k, k = 0, 1, 2, \dots$ към $IRR_p^{(CF)}$ по метода на хордите, започвайки с $r_0 = 0,06$ и $r_1 = 0,07$. За първото приближение r_2 получаваме

$$\begin{aligned} r_2 &= 0,06 - \frac{0,07 - 0,06}{NPV(0,07) - NPV(0,06)} NPV(0,06) \\ &= 0,06 + \frac{0,01}{1466,197386 + 9288,942698} 9288,942698 = 0,068636747. \end{aligned}$$

За следващите приближения получаваме

$$r_3 = 0,068636747 + \frac{(0,07 - 0,068636747)16,545748}{1466,197386 + 16,545748} = 0,068651959,$$

$$r_4 = 0,068651959 + \frac{(0,07 - 0,068651959)0,05434}{-1466,197386 + 0,05434} = 0,068651909,$$

$$r_5 = 0,068651909 + \frac{(0,07 - 0,068651909)0,00022}{1466,197386 + 0,00022} = 0,0686519092.$$

Следователно, с точност до 10^{-9} са в сила равенствата

$$r_5 = r_4 = IRR_p^{(CF)} \approx 6,8652\%.$$

За прилагане метода на Нютон полагаме $x = \dfrac{1}{1+r}$ и без ограничение на общността можем да запишем

$$NPV(x) = -303 + 22x + 31,5x^2 + 61,1x^3 + 109,1x^4 + 168,8x^5$$

и

$$NPV'(x) = 22 + 63x + 183,3x^2 + 436,4x^3 + 844x^4.$$

Така формула (1) добива вида

$$x_k = x_{k-1} - \frac{168,8x_{k-1}^5 + 109,1x_{k-1}^4 + 61,1x_{k-1}^3 + 31,5x_{k-1}^2 + 22x_{k-1} - 303}{844x_{k-1}^4 + 436,4x_{k-1}^3 + 183,3x_{k-1}^2 + 63x_{k-1} + 22},$$

където $k = 1, 2, \dots$. Избираме $r_0 = 0,06$ и получаваме $x_0 = \dfrac{1}{1,06}$, откъдето намираме

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{1,06} \\ &- \frac{168,8.1,06^{-5} + 109,1.1,06^{-4} + 61,1.1,06^{-3} + 31,5.1,06^{-2} + 22.1,06^{-1} - 303}{844.1,06^{-4} + 436,4.1,06^{-3} + 183,3.1,06^{-2} + 63.1,06^{-1} + 22} \\ &= \frac{1}{1,06} - \frac{9,644941275}{1279,507217} = 0,935858214, \qquad r_1 = 0,068537931; \end{aligned}$$

$$x_2 = 0,935858214$$
$$-\frac{168,8.0,935858214^5 + 109,1.0,935858214^4 + 61,1.0,935858214^3}{844.0,935858214^4 + 436,4.0,935858214^3 + 183,3.0,935858214^2 + 63.0,935858214 + 22}$$
$$-\frac{31,5.0,935858214^2 + 22.0,935858214 - 303}{844.0,935858214^4 + 436,4.0,935858214^3 + 183,3.0,935858214^2 + 63.0,935858214 + 22}$$
$$= 0,935758409, \qquad r_2 = 0,068651897;$$

$$x_3 = 0,935758409$$
$$-\frac{168,8.0,935758409^5 + 109,1.0,935758409^4 + 61,1.0,935758409^3}{844.0,935758409^4 + 436,4.0,935758409^3 + 183,3.0,935758409^2 + 63.0,935758409 + 22}$$
$$-\frac{31,5.0,935758409^2 + 22.0,935758409 - 303}{844.0,935758409^4 + 436,4.0,935758409^3 + 183,3.0,935758409^2 + 63.0,935758409 + 22}$$
$$= 0,935758399, \qquad r_3 = 0,068651909;$$

$$x_4 = 0,935758399$$
$$-\frac{168,8.0,935758399^5 + 109,1.0,935758399^4 + 61,1.0,935758399^3}{844.0,935758399^4 + 436,4.0,935758399^3 + 183,3.0,935758399^2 + 63.0,935758399 + 22}$$
$$-\frac{31,5.0,935758399^2 + 22.0,935758399 - 303}{844.0,935758399^4 + 436,4.0,935758399^3 + 183,3.0,935758399^2 + 63.0,935758399 + 22}$$
$$= 0,935758399 = x_3, \qquad r_4 = r_3 = 0,068651909.$$

Следователно, стойността на $IRR_p^{(CF)}$ се намира по метода на Нютон със същата точност, но на четвъртата стъпка.

2. Елементи от анализ на портфейлния риск

В този раздел са разгледани примери, свързани с портфейлната теория на Х. Марковиц.

Първият пример се отнася за портфейл от два актива с известни възвръщаемости и дисперсии и неизвестна ковариация между възвръщаемостите. Във втория пример е разгледан портфейл от три актива с дадени възвръщаемости и дисперсионно-ковариационна матрица. И в двата случая задачата е да се определи структурата на портфейла (квотите на активите) така, че дисперсията му да е минимална. Съгласно теорията на Марковиц, последната е мярка за портфейлния риск. Освен това е установена явна функционална връзка между риск и възвръщаемост, което позволява техния анализ и управление.

Основно предположение в разгледаните примери е отсъствието на активи с къси продажби, което налага дяловете на активите да са в интервала $(0, 1)$.

ПРИМЕР 1. Образуван е портфейл от активите A_1 и A_2 с възвръщаемости съответно $R_1 = 0,08, R_2 = 0,12$ и стандартни отклонения $\sigma_1 = 0,1, \sigma_2 = 0,15$. Да се определят дяловите участия (квотите) на двата актива в портфейла така, че дисперсията му да е минимална. Да се изследва връзката между дисперсията и възвръщаемостта на портфейла.

Решение: Означаваме с $x \in (0, 1)$ делът на A_1 в портфейла. Тогава делът на A_2 е равен на $(1 - x) \in (0, 1)$, а портфейлната възвръщаемост е

$$R_p = 0,08x + (1 - x)\,0,12 = 0,12 - 0,04x.$$

Вижда се, че R_p е намаляваща функция на x и се изменя в интервала $(0,08; 0,12)$. За портфейлната дисперсия имаме

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= 0,1^2x^2 + 2.0,1.0,15x(1 - x)\rho + 0,15^2(1 - x)^2 \\ &= (0,0325 - 0,03\rho)x^2 + (0,03\rho - 0,045)x + 0,0225, \end{aligned}$$

където $\rho \in [-1, 1]$ и представлява коефициентът на корелация между възвръщаемостите на двата актива. За тези стойности на ρ коефициентът $0,0325 - 0,03\rho$ пред x^2 е винаги положителен. Това означава, че квадратната функция е с параболична графика, в чийто връх тя има абсолютен минимум. Стойността на x, за която σ_p^2 има минимум е решение на уравнението $(\sigma_p^2)'_x = 0$, т.е.

$$2(0,0325 - 0,03\rho)x + 0,03\rho - 0,045 = 0$$

и $x^* = \dfrac{2,25-1,5\rho}{3,25-3\rho}$. Понеже $x^* \in (0,1)$ намираме, че трябва $\rho \in \left[-1, \frac{2}{3}\right)$. Тогава в този интервал $\min \sigma_p^2 = \dfrac{0,0225(1-\rho^2)}{3,25-3\rho}$. Изменението на x^* и $\min \sigma_p^2$ в зависимост от ρ се определя от знака на техните производни относно ρ:

$$(x^*)' = \frac{1,875}{(3,25-3\rho)^2} > 0 \quad \text{и} \quad (\min \sigma_p^2)' = 0,0675\frac{\rho^2 - \frac{13}{6}\rho + 1}{(3,25-3\rho)^2} > 0$$

за всички стойности на $\rho \in \left[-1, \dfrac{2}{3}\right)$. Следователно x^* и σ_p^2 са растящи функции на ρ. При това $x^* \in [0,6; 1)$, а $\min \sigma_p^2 \in [0; 0,01)$. За сравнение имаме $\sigma_1^2 = 0,01$ и $\sigma_2^2 = 0,0225$. При растене на x^* от $0,6$ до 1 възвръщаемостта R_p на портфейла намалява от $0,096$ до $0,08$. Зависимостта на R_p от x е линейна, което позволява да изразим еднозначно x чрез R_p:

$$x = 3 - 25R_p, \quad R_p \in (0,08; 0,096].$$

Това равенство ни дава възможност да получим портфейлния риск σ_p^2 като квадратна функция на портфейлната възвръщаемост R_p с коефициенти, зависещи от ρ:

$$\sigma_p^2 = (20,3125 - 18,75\rho)R_p^2 - 3,75(1-\rho)R_p + 0,18(1-\rho), \quad R_p \in (0,08; 0,096].$$

Всъщност това е безкрайно еднопараметрично множество от квадратни функции с положителни коефициенти пред R_p^2 и отрицателни пред R_p. Техните графики са части от параболи, обърнати с върха надолу. Всяка от тези функции има абсолютен минимум за $R_p = \dfrac{1-\rho}{\dfrac{32,5}{3} - 10\rho} \in (0,08; 0,096)$, когато $\rho \in \left[-1, \dfrac{2}{3}\right)$.

Друга важна характеристика на портфейла е функцията $z = \alpha R_p - \beta\sigma_p^2$ където α и β са положителни константи. Прието е тя да се счита за **функция на полезност**. Като имаме предвид зависимостта на R_p и σ_p^2 от дяловото участие x на актива A_1 получаваме

$$z = -\frac{1}{100}\left[\beta(3,25-3\rho)x^2 - ((4,5-3\rho)\beta - 4\alpha)x + 2,25\beta - 12\alpha\right].$$

Задачата е да се намери максималната стойност на z в зависимост от α, β и ρ. От $z'_x = 0$ определяме $x^{**} = \dfrac{4,5 - 4\dfrac{\alpha}{\beta} - 3\rho}{6,5 - 6\rho}$. Вижда се, че x^{**} зависи от два параметъра: $\dfrac{\alpha}{\beta} \in [0, \infty)$ и $\rho \in [-1, 1]$. Освен това $x^{**} \le x^*$ за всяко $\rho \in [-1, 1]$, като равенство се получава точно при $\alpha = 0$. Като граничен случай имаме $\lim\limits_{\beta \to \infty} x^{**} = x^*$ при фиксирани стойности на $\alpha > 0$ и $\rho \in [-1, 1]$.

Ще изследваме x^{**} в лентата $[0, \infty) \times [-1, 1]$ на параметричното пространство $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}, \rho\right)$. Условието $x^{**} \in [0, 1]$ налага $\rho \in \left[-1; \dfrac{4}{3}\left(0,5 + \dfrac{\alpha}{\beta}\right)\right]$ при $\dfrac{\alpha}{\beta} \in [0; 0,25]$; $\rho \in [-1, 1]$ при

$\frac{\alpha}{\beta} \in [0,25; 0,375]$ и $\rho \in \left[-1; 1,5 - \frac{4}{3}\frac{\alpha}{\beta}\right]$ при $\frac{\alpha}{\beta} \in [0,375; 1,875]$. Следователно, задачата е решима тогава и само тогава, когато точката $M\left(\frac{\alpha}{\beta}, \rho\right)$ се намира в петоъгълника $ABCDE$, където $A \in (0, -1)$, $B \in (1,875; -1)$, $C \in (0,375; 1)$, $D \in (0,25; 1)$ и $E \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$. В триъгълника $\frac{\alpha}{\beta} \in [0; 0,25]$, $\rho \in \left[\frac{4}{3}\left(0,5 + \frac{\alpha}{\beta}\right), 1\right]$ имаме $x^{**} \geq 1$, а в безкрайната лента $\rho \in [-1, 1]$, $\frac{\alpha}{\beta} \in [1,125 - 0,75\rho; \infty)$ (надясно от отсечката BC) имаме $x^{**} \leq 0$.

Понеже $(x^{**})'_{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{-4\frac{\alpha}{\beta}}{(6,5-6\rho)^2} < 0$ и $(x^{**})'_{\rho} = \frac{24\left(0,3125 - \frac{\alpha}{\beta}\right)}{(6,5-6\rho)^2} < 0$, то в петоъгълника $ABCDE$ функцията x^{**} е намаляваща функция на $\frac{\alpha}{\beta}$ при фиксирана стойност на ρ, растяща функция на ρ за $\frac{\alpha}{\beta} \in [0; 0,3125)$ и намаляваща функция на ρ за $\frac{\alpha}{\beta} \in (0,3125; 1,875]$. Върху контура на $ABCDE$ се получават следните резултати:

$$\begin{array}{llll}
\text{AB}: & \rho = -1, & \frac{\alpha}{\beta} \in [0; 1,875], & x^{**} = \frac{7,5 - 4\frac{\alpha}{\beta}}{12,5} \in [0,6; 0]; \\
\text{BC}: & \rho = 1,5 - \frac{4}{3}\frac{\alpha}{\beta}, & \frac{\alpha}{\beta} \in [0,375; 1,875], & x^{**} = 0; \\
\text{CD}: & \rho = 1, & \frac{\alpha}{\beta} \in [0,25; 0,375], & x^{**} = 3 - 8\frac{\alpha}{\beta} \in [0,1]; \\
\text{DE}: & \rho = \frac{2}{3}\left(1 + 2\frac{4}{3}\frac{\alpha}{\beta}\right), & \frac{\alpha}{\beta} \in [0; 0,25], & x^{**} = 1; \\
\text{EA}: & \rho \in \left[-1, \frac{2}{3}\right], & \frac{\alpha}{\beta} = 0, & x^{**} = \frac{4,5 - 3\rho}{6,5 - 6\rho}.
\end{array}$$

В така намереното параметрично множество на съществуване на x^{**} имаме

$$\begin{aligned}
\max z &= -\frac{\beta}{100}\left[(3,25 - 3\rho)\frac{\left(4,5 - 4\frac{\alpha}{\beta} - 1,5\rho\right)^2}{(6,5-6\rho)^2} - \frac{\left(4,5 - 4\frac{\alpha}{\beta} - 3\rho\right)^2}{6,5 - 6\rho} + 2,25 - 12\frac{\alpha}{\beta}\right] \\
&= \frac{\beta}{100}\frac{\left(4,5 - 4\frac{\alpha}{\beta} - 3\rho\right)^2 - (13 - 12\rho)\left(2,25 - 12\frac{\alpha}{\beta}\right)}{13 - 12\rho} \\
&= \frac{\beta}{100}\frac{16\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 9\rho^2 - 120\frac{\alpha}{\beta}\rho + 120\frac{\alpha}{\beta} - 9}{13 - 12\rho}.
\end{aligned}$$

При фиксирано $\beta > 0$ търсим локален екстремум на $\max z$ в $ABCDE$ относно $\frac{\alpha}{\beta}$ и ρ. За съответните частни производни получаваме

$$(\max z)'_{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{0,32\beta}{13-12\rho}\left[\frac{\alpha}{\beta}+3,75(1-\rho)\right] > 0,$$

$$(\max z)'_{\rho} = \frac{0,12\beta}{(13-12\rho)^2}\left(4\frac{\alpha}{\beta}+3\rho-4,5\right)\left(4\frac{\alpha}{\beta}-3\rho+2\right)$$

вътре в ABCDE. Следователно, $\max z$ е растяща по $\frac{\alpha}{\beta}$, т.е. по α при фиксирано β и намаляваща по ρ без да има екстремум.

ПРИМЕР 2. Да предположим, че портфейлът от Пример 1 е обогатен с още един актив A_3 с възвръщаемост $R_3 = 0,14$ и стандартно отклонение $\sigma_3 = 0,18$. Нека ковариациите между възвръщаемостите на тези активи са $\sigma_{12} = 0,012$, $\sigma_{13} = 0,016$ и $\sigma_{23} = 0,02$. Следователно, дисперсионно-ковариационната матрица на портфейла е

$$\sum = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,012 & 0,016 \\ 0,012 & 0,0225 & 0,02 \\ 0,016 & 0,02 & 0,0324 \end{pmatrix}.$$

Да означим с x_1, x_2 и $1-x_1-x_2$ дяловете на активите A_1, A_2 и A_3 в портфейла. Те удовлетворяват неравенствата

$$x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad x_1 + x_2 < 1. \tag{2}$$

Съгласно теорията на Х. Марковиц, за портфейлната дисперсия σ_p^2 е в сила представянето

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 = \;& 0,01x_1^2 + 0,0225x_2^2 + 0,0324(1-x_1-x_2)^2 + 0,024x_1x_2 \\ & +0,032x_1(1-x_1-x_2) + 0,04x_2(1-x_1-x_2)\end{aligned} \tag{3}$$

като квадратична форма на дяловете на активите. При посочените условия (2) за величините x_1 и x_2 задачата е да се намерят онези техни стойности, които минимизират σ_p^2.

Решение: След разкриване на скобите в (3) получаваме

$$\sigma_p^2 = 0,0104x_1^2 + 0,0168x_1x_2 + 0,0149x_2^2 - 0,0328x_1 - 0,0248x_2 + 0,0324. \tag{4}$$

От необходимото условие за локален екстремум на σ_p^2

$$\left|\begin{array}{l}(\sigma_p^2)'_{x_1} = 0,0208x_1 + 0,0168x_2 - 0,0328 = 0 \\ (\sigma_p^2)'_{x_2} = 0,0168x_1 + 0,0298x_2 - 0,0248 = 0.\end{array}\right.$$

намираме координатите на стационарната точка $x_1 \approx 1,66$, $x_2 \approx -0,1$, които не удовлетворяват условията (2).

Ако R_p е възвръщаемостта на портфейла, то

$$R_p = 0,08x_1 + 0,12x_2 + 0,14(1-x_1-x_2)$$

и $R_p \in (0,08; 0,14)$ тогава и само тогава, когато са в сила условията (2). От

$$R_p = 0,14 - 0,06\,x_1 - 0,02\,x_2$$

изразяваме $x_2 = 7 - 3\,x_1 - 50\,R_p$ и го заместваме в представянето на σ_p^2. Така от (4) получаваме

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= 0,0104x_1^2 + 0,0149(7-3x_1-50R_p)^2 + 0,0168x_1(7-3x_1-50R_p)\\ &-0,0328x_1 - 0,0248(7-3x_1-50R_p) + 0,0324.\end{aligned}$$

След несложни преобразования на този израз окончателно намираме

$$\sigma_p^2 = 0,0941x_1^2 + 3,63x_1R_p + 37,25R_p^2 - 0,4666x_1 - 9,19R_p + 0,5889.$$

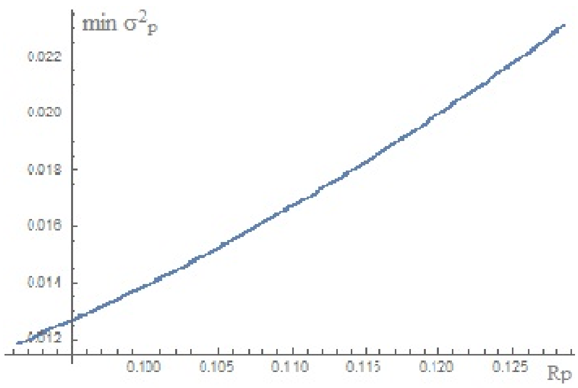
При така намерената портфейлна дисперсия, необходимото условие за нейния минимум по x_1 е уравнението $(\sigma_p^2)'_{x_1} = 0,1882x_1 + 3,63R_p - 0,4666$ да има решение относно x_1. Получаваме $x_1 = \dfrac{0,4666 - 3,63R_p}{0,1882}$ и след заместване намираме

$$x_2 = \frac{1,48R_p - 0,0824}{0,1882} \quad \text{и} \quad x_1 + x_2 = \frac{0,3842 - 2,15R_p}{0,1882}.$$

От условията (2) следва, че $R_p \in (0,0911628;\,0,12854)$. В този интервал на изменение на R_p получаваме

$$(\min\sigma_p^2)_{x_1} = 2,2423R_p^2 - 0,19R_p + 0,0104846. \tag{5}$$

Графиката на тази функция е част от парабола, чиято ос е перпендикулярна на абсцисната ос (Фиг.1).



Фиг. 1

Абсолютният минимум на функцията σ_p^2 се получава за онази стойност на R_p, която е решение на уравнението

$$((\min\sigma_p^2)_{x_1})'_{R_p} = 4,4846R_p - 0,19 = 0.$$

Решението е $R_p = \dfrac{0,19}{4,4846} = 0,042367 \notin (0,0911628;\, 0,12854)$, поради което σ_p^2 няма абсолютен минимум. Това е следствие от факта, че минимумът на σ_p^2 по x_1 и x_2 се достига за техни стойности, които са извън триъгълника (2).

Понеже $((\min \sigma_p^2)_{x_1})'_{R_p} > 0$ в посочения интервал, то $(\min \sigma_p^2)_{x_1}$ е растяща функция на R_p като

$$\inf(\min \sigma_p^2)_{x_1} = (\min \sigma_p^2)_{x_1}(R_p = 0,0911628) = 0,0118$$

и

$$\sup(\min \sigma_p^2)_{x_1} = (\min \sigma_p^2)_{x_1}(R_p = 0,12854) = 0,02311.$$

В същото време, при $R_p = 0,0911628$ имаме

$$x_1 = \frac{0,4666 - 3,63.0,0911628}{0,1882} = 0,72093;\ x_2 = \frac{1,48.0,0911628 - 0,0824}{0,1882} = 0,27907;$$

$$1 - x_1 - x_2 = 0$$

и активът A_3 отпада от портфейла, а при $R_p = 0,12854$ съответно

$$x_1 = \frac{0,4666 - 3,63.0,12854}{0,1882} = 0;\ x_2 = \frac{1,48.0,12854 - 0,0824}{0,1882} = 0,573;$$

$$1 - x_1 - x_2 = \frac{2,15.0,12854 - 0,196}{0,1882} = 0,427,$$

като активът A_1 отпада от портфейла. И в двата случая портфейлът се редуцира до два актива. Постоянен компонент на портфейла е само активът A_2 с възвръщаемост $R_2 = 0,12 \in (0,0911628;\, 0,12854)$. При $R_p = 0,08$ портфейлът се редуцира само до актив A_1, а при $R_p = 0,14$ - само до актив A_3. При $R_p = 0,1$ получаваме $(\min \sigma_p^2)_{x_1} = 0,0139$; $x_1 = 0,55$; $x_2 = 0,35$; $1 - x_1 - x_2 = 0,1$. При $R_p = 0,11$ получаваме $(\min \sigma_p^2)_{x_1} = 0,0167$; $x_1 = 0,3576$; $x_2 = 0,4272$; $1 - x_1 - x_2 = 0,2152$.
При $R_p = 0,12$ получаваме $(\min \sigma_p^2)_{x_1} = 0,0167$; $x_1 = 0,3576$, $x_2 = 0,4272$, $1 - x_1 - x_2 = 0,2152$.
Важно е да се отбележи, че интервалът $(0,0911628;\, 0,12854)$ задава неизброимо множество от ефективни портфейли (с минимални дисперсии) от три актива при възвръщаемости около и над средната възвръщаемост на активите.

Ще изследваме за максимум функцията на предпочитание $z = \alpha R_p - \beta\sigma_p^2$ по x_1 и x_2 при произволни константи $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. За целта използваме представянията на R_p и σ_p^2 чрез x_1 и x_2 и получаваме

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 = \ & -\frac{\beta}{100}(1,04x_1^2 + 1,68x_1x_2 + 1,49x_2^2) - (0,06\alpha - 0,0328\beta)x_1 \\ & -(0,02\alpha - 0,0248\beta)x_2 + 0,14\alpha - 0,0324\beta.\end{aligned}$$

Системата

$$\left|\begin{aligned} z'_{x_1} &= -\frac{\beta}{100}(2,08x_1 + 1,68x_2) - (0,06\alpha - 0,0328\beta) = 0 \\ z'_{x_2} &= -\frac{\beta}{100}(1,68x_1 + 2,98x_2) - (0,02\alpha - 0,0248\beta) = 0.\end{aligned}\right.$$

има решение $x_1 = \dfrac{0,3505 - 0,9075\dfrac{\alpha}{\beta}}{0,211}$ и $x_2 = \dfrac{0,37\dfrac{\alpha}{\beta} - 0,022}{0,211}$. Изпълнението на условията (2) налага неравенствата

$$0,2186\beta \approx \frac{47}{215}\beta < \alpha < \frac{140,2}{363}\beta \approx 0,386\beta$$

за произволно $\beta > 0$. Тези неравенства задават ъгъл в първи квадрант на параметричното пространство (α, β).

За $\dfrac{\alpha}{\beta} \in \left(\dfrac{47}{215}; \dfrac{140,2}{363}\right)$ функцията x_1 е намаляваща, а x_2 и $1 - x_1 - x_2 = \dfrac{0,5375\dfrac{\alpha}{\beta} - 0,1175}{0,211}$ са растящи функции на $\dfrac{\alpha}{\beta}$.

Максималната стойност на функцията на предпочитание е

$$\max z = \frac{1}{4,4521}\left[0,69963734\frac{\alpha^2}{\beta} - 0,002791464\alpha - 0,017320061\beta\right].$$

Частните производни на $\max z$ са

$$(\max z)'_\alpha = \frac{1}{4,4521}\left(1,39927468\frac{\alpha}{\beta} - 0,002791464\right) > 0$$

$$(\max z)'_\beta = \frac{-1}{4,4521}\left(0,69963734\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 0,017320061\right) < 0$$

за $\alpha \in \left(\dfrac{47}{215}\beta, \dfrac{140,2}{363}\beta\right)$, $\beta > 0$. Следователно, функцията $\max z$ е растяща по α при фиксирано β и намаляваща по β при фиксирано α. Функцията $\max z$ може да бъде представена във вида

$$\max z = 0,157147714\beta\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 0,004\frac{\alpha}{\beta} - 0,024755769\right].$$

При фиксирано $\beta > 0$ тази функция е строго растяща за $\dfrac{\alpha}{\beta} \in \left(\dfrac{47}{215}, \dfrac{140,2}{363}\right)$, тъй като $(\max z)'_{\frac{\alpha}{\beta}} > 0$.

ПРИМЕР 3. Нека активите A_i $(i = \overline{1,3})$ имат възвръщаемости съответно $R_1 = 0,05$, $R_2 = 0,01$, $R_3 = 0,15$ и дисперсионно-ковариационна матрица

$$\sum = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,15 & 0,17 \\ & 0,28 & 0,09 \\ & & 0,21 \end{pmatrix}.$$

Да се намерят дяловите участия на активите в портфейл с минимална дисперсия.

Решение. Означаваме дяловите участия на активите съответно с x_1, x_2 и $1 - x_1 - x_2$, а възвръщаемостта на портфейла с R_p. Тогава дисперсията на портфейла е

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= 0,25x_1^2 + 0,28x_2^2 + 0,21(1 - x_1 - x_2)^2 + 0,3x_1x_2 \\ &+0,34x_1(1 - x_1 - x_2) + 0,18x_2(1 - x_1 - x_2),\end{aligned}$$

а неговата възвръщаемост $R_p = 0,15 - 0,1\,x_1 - 0,05\,x_2$.
От неравенствата (2), следва $0,05 < R_p < 0,15$. Изразяваме x_2 и $1 - x_1 - x_2$ чрез x_1 и R_p:

$$x_2 = 3 - 2x_1 - 20R_p; \quad 1 - x_1 - x_2 = x_1 + 20R_p - 2,$$

заместваме ги в σ_p^2 и получаваме

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= 0,25x_1^2 + 0,28(3 - 2x_1 - 20R_p)^2 + 0,21(x_1 + 20R_p - 2)^2 \\ &+0,3x_1(3 - 2x_1 - 20R_p) + 0,34x_1(x_1 + 20R_p - 2) \\ &+0,18(3 - 2x_1 - 20R_p)(x_1 + 20R_p - 2),\end{aligned}$$

т.е.

$$\sigma_p^2 = 0,75x_1^2 + 0,18x_1R_p + 124R_p^2 - 2,16x_1 - 29,6R_p + 1,93.$$

От необходимото условие за локален екстремум на σ_p^2 имаме

$$(\sigma_p^2)'_{x_1} = 1,5x_1 + 18R_p - 2,16 = 0,$$

откъдето $x_1 = 1,44 - 12R_p$, $x_2 = 0,12 + 4R_p$ и $1 - x_1 - x_2 = 8R_p - 0,56$. Последните три равенства и неравенствата (2) налагат $0,07 < R_p < 0,12$, за да съществува портфейл от три актива с минимална по x_1 дисперсия. Заместваме x_1 в σ_p^2 и получаваме

$$(\min \sigma_p^2)_{x_1} = 16R_p^2 - 3,68R_p + 0,3748, \quad R_p \in (0,07; 0,12).$$

От необходимото условие за локален екстремум на тази функция

$$((\min \sigma_p^2)_{x_1})' = 32R_p - 3,6$$

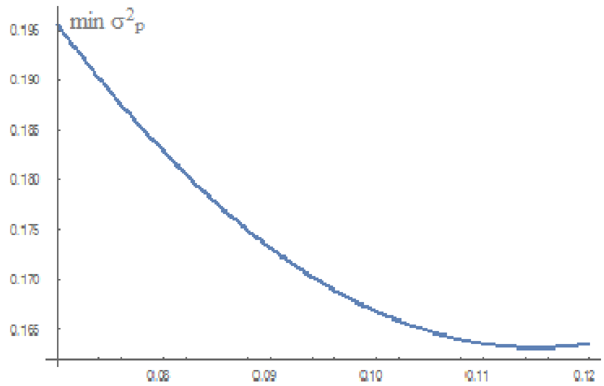
се получава $R_p = 0,115$, откъдето намираме абсолютния минимум на σ_p^2: $\min \sigma_p^2 = 0,1632$, като $x_1 = 0,06$, $x_2 = 0,56$ и $1 - x_1 - x_2 = 0,36$ (Фиг.2).

При $R_p = 0,07$ имаме $1 - x_1 - x_2 = 0$, т.е. активът A_3 отпада от портфейла, а при $R_p = 0,12$ получаваме $x_1 = 0$ и активът A_1 отпада. С постоянно присъствие в портфейла е само активът A_2.

В този случай множеството на ефективните портфейли от три актива се обуславя от сравнително тесния интервал $(0,115; 0,12)$. Възвръщаемостта на всеки от тях обаче, е над средната за трите актива.

Следвайки подхода в Пример 2, ще потърсим максимума на функцията на полезност $z = \alpha R_p - \beta\sigma_p^2$ по x_1 и x_2 при положителни константи α и β. За целта използваме, че $R_p = 0,15 - 0,1\,x_1 - 0,05\,x_2$ и

$$\sigma_p^2 = 0,12x_1^2 + 0,2x_1x_2 + +0,31x_2^2 - 0,08x_1 - 0,24x_2 + 0,21,$$



Фиг. 2

откъдето намираме

$$z = 0,15\alpha - 0,21\beta + (0,08\beta - 0,1\alpha)x_1 + (0,24\beta - 0,05\alpha)x_2 - \beta(0,12x_1^2 + 0,2x_1x_2 + 0,31x_2^2).$$

Системата

$$\left| \begin{array}{l} z'_{x_1} = 0,08\beta - 0,1\alpha - 0,24\beta x_1 - 0,2\beta x_2 = 0 \\ z'_{x_2} = 0,24\beta - 0,05\alpha - 0,2\beta x_1 - 0,62\beta x_2 = 0 \end{array} \right.$$

има решение

$$x_1 = \frac{1 - 32,5\dfrac{\alpha}{\beta}}{68}, \qquad x_2 = \frac{26 + 5\dfrac{\alpha}{\beta}}{68},$$

удовлетворяващо условия (2) при $\alpha \in \left(0, \dfrac{2}{65}\beta\right)$, $\beta > 0$. В интервала $\left(0, \dfrac{2}{65}\right)$ функцията x_1 е намаляваща, а x_2 и $1 - x_1 - x_2 = \dfrac{41 + 27,5\dfrac{\alpha}{\beta}}{68}$ са растящи функции на $\dfrac{\alpha}{\beta}$. За функцията z получаваме

$$\max z = \frac{1}{34}\left(0,75\frac{\alpha^2}{\beta} + 4,4\alpha - 5,56\beta\right)$$

и

$$(\max z)'_\alpha = \frac{1}{34}\left(1,5\frac{\alpha}{\beta} + 4,4\right) > 0,$$

$$(\max z)'_\beta = \frac{-1}{34}\left(0,75\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 5,56\right) < 0.$$

Следователно, в ъгъла $\alpha \in \left(0, \dfrac{2}{65}\beta\right)$, $\beta > 0$ на параметричното пространство (α, β) функцията $\max z$ е растяща по α при фиксирано β и намаляваща по β при фиксирано α.
От представянето

$$\max z = \frac{3}{136}\beta\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \frac{17,6}{3}\frac{\alpha}{\beta} - \frac{20,24}{3}\right]$$

следва, че при фиксирано $\beta > 0$ функцията $\max z$ е строго растяща за $\dfrac{\alpha}{\beta} \in \left(0, \dfrac{2}{65}\right)$ поради $(\max z)'_{\frac{\alpha}{\beta}} > 0$.

ПРИМЕР 4. Даден е портфейл от пет актива A_i $(i = \overline{1,5})$ с дялови участия в портфейла съответно $20\% = 0,2$, $18\% = 0,18$, $14\% = 0,14$, $22\% = 0,22$, $26\% = 0,26$, възвръщаемости $R_1 = 0,05$, $R_2 = 0,04$, $R_3 = 0,03$, $R_4 = 0,06$, $R_5 = 0,07$ и дисперсионно-ковариационна матрица

$$\sum = \begin{pmatrix} 0,04 & 0,005 & 0,006 & 0,0045 & 0,003 \\ 0,005 & 0,03 & 0,0035 & 0,0038 & 0,0039 \\ 0,006 & 0,0035 & 0,02 & 0,0024 & 0,0023 \\ 0,0045 & 0,0038 & 0,0024 & 0,05 & 0,004 \\ 0,003 & 0,0039 & 0,0023 & 0,004 & 0,055 \end{pmatrix}.$$

А) Да се намерят очакваната възвръщаемост и риска на портфейла.
Б) Да се определят онези дялове на петте актива, които минимизират дисперсията на портфейла, а така също и да се установи функционална връзка между дисперсията и възвръщаемостта на портфейла.

Решение: А) Съгласно теорията на Х. Марковиц, очакваната възвръщаемост R_p на портфейла е претеглена средна на възвръщаемостите на активите с тегла - техните квоти в портфейла, т.е.

$$R_p = 0,2.0,05 + 0,18.0,04 + 0,14.0,03 + 0,22.0,06 + 0,26.0,07 = 0,0528 = 5,28\%.$$

Пак според тази теория, мярка за портфейлния риск е неговата дисперсия σ_p^2, която е квадратична форма на квотите с коефициенти - елементите на матрицата $\sum$, т.е.

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= 0,04.0,2^2 + 0,03.0,18^2 + 0,02.0,14^2 + 0,05.0,22^2 + 0,055.0,26^2 \\ &+0,01.0,2.0,18 + 0,012.0,2.0,14 + 0,009.0,2.0,22 + 0,006.0,2.0,26 \\ &+0,007.0,18.0,14 + 0,0076.0,18.0,22 + 0,0078.0,18.0,26 + 0,0048.0,14.0,22 \\ &+0,0046.0,14.0,26 + 0,008.0,22.0,26 = 0,01212128, \end{aligned}$$

Тъй като дисперсиите (рисковете) на активите са $\sigma_1^2 = 0,04$, $\sigma_2^2 = 0,03$, $\sigma_3^2 = 0,02$, $\sigma_4^2 = 0,05$, $\sigma_5^2 = 0,055$, се вижда, че портфейлният риск е по-малък от всеки от тях. Това се дължи на корелациите между активите.
Решение: Б) Ще използваме подхода в Пример 2.
Нека x_1, x_2, x_3, x_4 и $1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4$, $\left(x_i > 0, i = \overline{1,4}; \sum_{i=1}^{4} x_i < 1\right)$ са дяловете съответно на активите A_1, A_2, A_3, A_4 и A_5 в портфейла. Съобразно дисперсионно-ковариационната матрица на активите, дисперсията на портфейла е

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= 10^{-3}(40x_1^2 + 30x_2^2 + 20x_3^2 + 50x_4^2 + 55(1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4)^2 \\ &+10x_1x_2 + 12x_1x_3 + 9x_1x_4 + 6x_1(1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4) + 7x_2x_3 + 7,6x_2x_4 \\ &+7,8x_2(1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4) + 4,8x_3x_4 + 4,6x_3(1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4) \\ &+8x_4(1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4)) \end{aligned}$$

След преобразуване на този израз получаваме

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= 10^{-3}(89x_1^2 + 77,2x_2^2 + 70,4x_3^2 + 97x_4^2 + \\ &+106,2x_1x_2 + 111,4x_1x_3 + 105x_1x_4 + 104,6x_2x_3 + 101,8x_2x_4 \\ &+102,2x_3x_4 - 104x_1 - 102,2x_2 - 105,4x_3 - 102x_4 + 55).\end{aligned}$$

Необходимото условие за локален екстремум на функцията σ_p^2 се изразява чрез системата

$$\left| \begin{array}{l} (\sigma_p^2)'_{x_1} = 0,1780x_1 + 0,1062x_2 + 0,1114x_3 + 0,105x_4 - 0,104 = 0 \\ (\sigma_p^2)'_{x_2} = 0,1062x_1 + 0,1544x_2 + 0,1046x_3 + 0,1018x_4 - 0,1022 = 0 \\ (\sigma_p^2)'_{x_3} = 0,1114x_1 + 0,1046x_2 + 0,1408x_3 + 0,1022x_4 - 0,1054 = 0\text{'} \\ (\sigma_p^2)'_{x_4} = 0,105x_1 + 0,1018x_2 + 0,1022x_3 + 0,194x_4 - 0,102 = 0 \end{array} \right.$$

която е еквивалентна на системата

$$\left| \begin{array}{l} 8,9x_1 + 5,31x_2 + 5,57x_3 + 5,25x_4 = 5,2 \\ 5,31x_1 + 7,72x_2 + 5,23x_3 + 5,09x_4 = 5,11 \\ 5,57x_1 + 5,23x_2 + 7,04x_3 + 5,11x_4 = 5,27^{\cdot} \\ 5,25x_1 + 5,09x_2 + 5,11x_3 + 9,7x_4 = 5,1 \end{array} \right. \tag{6}$$

Детерминантата на тази система е

$$D = \begin{vmatrix} 8,9 & 5,31 & 5,57 & 5,25 \\ 5,31 & 7,72 & 5,23 & 5,09 \\ 5,57 & 5,23 & 7,04 & 5,11 \\ 5,25 & 5,09 & 5,11 & 9,7 \end{vmatrix} = 602,216.$$

Следователно, системата (6) има единствено решение $x_i = \dfrac{D_i}{D}, i = \overline{1,4}$, където

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5,2 & 5,31 & 5,57 & 5,25 \\ 5,11 & 7,72 & 5,23 & 5,09 \\ 5,27 & 5,23 & 7,04 & 5,11 \\ 5,1 & 5,09 & 5,11 & 9,7 \end{vmatrix} = 80,64544,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 8,9 & 5,2 & 5,57 & 5,25 \\ 5,31 & 5,11 & 5,23 & 5,09 \\ 5,57 & 5,27 & 7,04 & 5,11 \\ 5,25 & 5,1 & 5,11 & 9,7 \end{vmatrix} = 135,1,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 8,9 & 5,31 & 5,2 & 5,25 \\ 5,31 & 7,72 & 5,11 & 5,09 \\ 5,57 & 5,23 & 5,27 & 5,11 \\ 5,25 & 5,09 & 5,1 & 9,7 \end{vmatrix} = 226,5938,$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 8,9 & 5,31 & 5,57 & 5,2 \\ 5,31 & 7,72 & 5,23 & 5,11 \\ 5,57 & 5,23 & 7,04 & 5,27 \\ 5,25 & 5,09 & 5,11 & 5,1 \end{vmatrix} = 82,7168.$$

Числата $x_1 = 0,1339$, $x_2 = 0,2243$, $x_3 = 0,3763$, $x_4 = 0,1374$ и $1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0,1281$ са координатите на единствената стационарна точка P^* на функцията σ_p^2. Достатъчното условие за екстремалност на P^* (критерий на Силвестър) се дава чрез знаците на главните минори на хесиана

$$H = \begin{pmatrix} 0,178 & 0,1061 & 0,1114 & 0,105 \\ 0,1062 & 0,1544 & 0,1046 & 0,1018 \\ 0,1114 & 0,1046 & 0,1408 & 0,1022 \\ 0,105 & 0,1018 & 0,1022 & 0,194 \end{pmatrix},$$

а именно

$$|H_1| = 0,178 > 0, \quad |H_2| = \begin{vmatrix} 0,178 & 0,1062 \\ 0,1062 & 0,1544 \end{vmatrix} = 0,0162 > 0,$$

$$|H_3| = \begin{vmatrix} 0,178 & 0,1062 & 0,1114 \\ 0,1062 & 0,1544 & 0,1046 \\ 0,1114 & 0,1046 & 0,1408 \end{vmatrix} = 0,0009 > 0,$$

$$|H_4| = |H| = 50^{-4}D = \frac{602,2160155}{625}10^{-4} > 0.$$

Следователно, σ_p^2 има минимум (глобален) в точката P^* и $\min \sigma_p^2 = 0,00973824$, а възвръщаемостта на портфейла в P^* е

$$R_p = 0,1339.0,05 + 0,2243.0,04 + 0,3763.0,03 + 0,1374.0,06 + 0,1281.0,07 = 0,044167.$$

Последните данни показват, че минималната дисперсия на портфейла е значително помалка от минималната дисперсия $(0,02)$ на съставящите го активи, докато възвръщаемостта му е близка до тяхната средно-аритметична $(0,05)$.

Ако някоя от координатите на точката P^* е извън интервала $(0,1)$ или искаме да увеличим портфейлната възвръщаемост за сметка на увеличена минимална портфейлна дисперсия, се налага да решим по-обща задача.

От зависимостта

$$R_p = 0,05x_1 + 0,04x_2 + 0,03x_3 + 0,06x_4 + 0,07(1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4)$$

изразяваме $x_4 = 7 - 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 100R_p$ и заместваме в σ_p^2:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= 10^{-3}(89x_1^2 + 77,2x_2^2 + 70,4x_3^2 + 97(7 - 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 100R_p)^2 \\ &+106,2x_1x_2 + 111,4x_1x_3 + 104,6x_2x_3 \\ &+(105x_1 + 101,8x_2 + 102,2x_3 - 102)(7 - 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 100R_p) \\ &-104x_1 - 102,2x_2 - 105,4x_3 + 55) \end{aligned}$$

След разкриване на скобите получаваме

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= 0,267x_1^2 + 0,6448x_2^2 + 1,2136x_3^2 + 970R_p^2 \\ &+0,7516x_1x_2 + 1,039x_1x_3 + 28,3x_1R_p + 1,7188x_2x_3 + 48,02x_2R_p \\ &+67,38x_3R_p - 1,881x_1 - 3,1576x_2 - 4,414x_3 - 125,6R_p + 4,094. \end{aligned}$$

Необходимото условие за локален екстремум на σ_p^2 относно променливите x_1, x_2 и x_3 се изразява чрез системата

$$\left|\begin{array}{l}(\sigma_p^2)'_{x_1} = 2.0,267x_1 + 0,7516x_2 + 1,039x_3 + 28,3R_p - 1,881 = 0\\ (\sigma_p^2)'_{x_2} = 0,7516x_1 + 2.0,6448x_2 + 1,7188x_3 + 48,02R_p - 3,1576 = 0.\\ (\sigma_p^2)'_{x_3} = 1,039x_1 + 1,7188x_2 + 2.1,2136x_3 + 67,38R_p - 4,414 = 0\end{array}\right.$$

Нейната еквивалентна система

$$\left|\begin{array}{l}0,267x_1 + 0,3758x_2 + 0,5195x_3 = 0,9405 - 14,15R_p\\ 0,3758x_1 + 0,6448x_2 + 0,8594x_3 = 1,5788 - 24,01R_p.\\ 0,5195x_1 + 0,8594x_2 + 1,2136x_3 = 2,207 - 33,69R_p\end{array}\right.$$

има единствено решение

$$x_1 = 7,11R_p - 0,18; \quad x_2 = 0,479 - 5,771R_p;$$

$$x_3 = 1,5563 - 26,7172R_p,$$

откъдето намираме

$$x_4 = 9,962R_p - 0,3022 \quad \text{и} \quad 1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 15,4162R_p - 0,5531.$$

От условията $x_i > 0$ $(i = \overline{1,4})$, за които $\sum_{i=1}^4 x_i < 1$ и от последните равенства следва, че при $R_p = 0,035878$ е изпълнено $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ и активът A_5 отпада, при $R_p = 0,058251$ се получава $x_3 = 0$ и активът A_3 отпада, при $R_p = 0,030335$ получаваме $x_4 = 0$ и активът A_4 отпада. Само активите A_1 и A_2 присъстват постоянно в портфейла, който е с пълен комплект от активи при $R_p \in (0,035878; 0,058251)$.

Заместваме намерените стойности на x_1, x_2 и x_3 в σ_p^2. Така получаваме $\min\sigma_p^2$ по променливите x_1, x_2, x_3, като квадратна функция на R_p:

$$\min\sigma_p^2|_{x_1,x_2,x_3} = 31,941R_p^2 - 2,8215R_p + 0,072, \quad R_p \in (0,035878; 0,058251).$$

Нейната първа производна

$$(\min\sigma_p^2|_{x_1,x_2,x_3})' = 63,882R_p - 2,8215$$

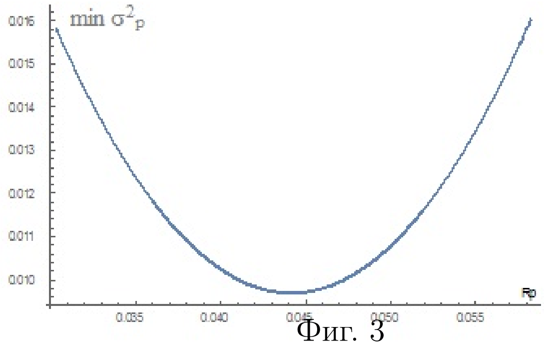
се анулира за $R_p = 0,044167$ и в нея $\min\sigma_p^2|_{x_1,x_2,x_3}$ има локален минимум, който е абсолютен за σ_p^2: $\min\sigma_p^2 = 0,0097$ (Фиг.3).

За тази стойност на R_p дяловете на активите в портфейла съвпадат с намерените по-горе.

И в този случай интервалът $(0,044167; 0,05825)$, обуславящ ефективните портфейли от пет актива, не е много голям. Възвръщаемостта на всеки от тях е около или над средната възвръщаемост на активите.

Като използваме представянето на R_p и σ_p^2 чрез дяловете участия $x_i, i = \overline{1,4}$ получаваме функцията на полезност $z = \alpha R_p - \beta\sigma_p^2$ с положителни параметри α и β, която ще изследваме за максимум. Имаме

$$\begin{aligned} z = \ & -0,01\beta(8,9x_1^2 + 7,72x_2^2 + 7,04x_3^2 + 9,7x_4^2 + 10,62x_1x_2 + 11,14x_1x_3\\ & +10,5x_1x_4 + 10,46x_2x_3 + 10,18x_2x_4 + 10,22x_3x_4) + 0,01[(10,4\beta - 2\alpha)x_1\\ & +(10,22\beta - 3\alpha)x_2 + (10,54\beta - 4\alpha)x_3 + (10,2\beta - \alpha)x_4 + 7\alpha - 5,5\beta], \end{aligned}$$



Фиг. 3

откъдето получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} z'_{x_1} = -0,01\beta(17,8x_1 + 10,62x_2 + 11,14x_3 + 10,5x_4) + 0,01(10,4\beta - 2\alpha) = 0 \\ z'_{x_2} = -0,01\beta(10,62x_1 + 15,44x_2 + 10,46x_3 + 10,18x_4) + 0,01(10,22\beta - 3\alpha) = 0 \\ z'_{x_3} = -0,01\beta(11,14x_1 + 10,46x_2 + 14,08x_3 + 10,22x_4) + 0,01(10,54\beta - 4\alpha) = 0 \\ z'_{x_4} = -0,01\beta(10,5x_1 + 10,18x_2 + 10,22x_3 + 10x_4) + 0,01(10,2\beta - \alpha) = 0 \end{array} \right.$$

Тя се преобразува в системата

$$\left| \begin{array}{l} 8,9x_1 + 5,31x_2 + 5,57x_3 + 5,25x_4 = 5,2 - \dfrac{\alpha}{\beta} \\ 5,31x_1 + 7,72x_2 + 5,23x_3 + 5,09x_4 = 5,11 - 1,5\dfrac{\alpha}{\beta} \\ 5,57x_1 + 5,23x_2 + 7,04x_3 + 5,11x_4 = 5,27 - 2\dfrac{\alpha}{\beta} \\ 5,25x_1 + 5,09x_2 + 5,11x_3 + 9,7x_4 = 5,1 - 0,5\dfrac{\alpha}{\beta}, \end{array} \right.$$

която съвпада с първата система в тази задача с точност до адитивно смущение на дясната страна. По тази причина решението й има вида

$$\widetilde{x}_1 = 0,1339 - 0,1113\frac{\alpha}{\beta}, \widetilde{x}_2 = 0,2243 + 0,09\frac{\alpha}{\beta}, \widetilde{x}_3 = 0,3763 + \frac{\alpha}{\beta}, \widetilde{x}_4 = 0,1374 + 0,1416\frac{\alpha}{\beta}.$$

Всички тези числа са положителни и $\widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 + \widetilde{x}_3 + \widetilde{x}_4 < 1$ за $\dfrac{\alpha}{\beta} \in (0; 0,238)$, т.е. в ъгъла $0 < \alpha < 0,238\beta$, $\beta > 0$ на параметричното пространство (α, β).

Хесианът на функцията z е

$$\widetilde{H} = 10^{-2} \begin{pmatrix} -17,8\beta & -10,62\beta & -11,14\beta & -10,5\beta \\ -10,62\beta & -15,44\beta & -10,46\beta & -10,18\beta \\ -11,14\beta & -10,46\beta & -14,08\beta & -10,22\beta \\ -10,5\beta & -10,18\beta & -10,22\beta & -19,4\beta \end{pmatrix} = -\beta H,$$

където H е хесианът на σ_p^2. Следователно, за главните минори на $\widetilde{H}$ получаваме

$$|\widetilde{H}_1| = -\beta|H_1| < 0, \quad \widetilde{H}_2 = \beta^2|H_2| > 0, \quad \widetilde{H}_3 = -\beta^3|H_3| < 0, \quad \widetilde{H}_4 = \beta^4|H_4| > 0,$$

което означава, че функцията z има локален максимум за $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, \widetilde{x}_4$ при стойности $0 < \alpha < 0,238\beta$, $\beta > 0$ и

$$\max z = 0,0416471418\alpha - 0,00973822744\beta - 0,03796346433\frac{\alpha^2}{\beta}.$$

В посочената област са изпълнени неравенствата

$$(\max z)'_\alpha = 0,0416471418 - 0,07592692866\frac{\alpha}{\beta} > 0,$$

$$(\max z)'_\beta = -0,00973822744 + 0,03796346433\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 < 0.$$

Това означава, че функцията $\max z$ е растяща по α при фиксирано β и намаляваща по β при фиксирано α.

От представянето

$$\max z = \beta\left[-0,00973822744 + 0,0416471418\frac{\alpha}{\beta} - 0,03796346433\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right]$$

следва, че при фиксирано $\beta > 0$ функцията $\max z$ е строго растяща за $\dfrac{\alpha}{\beta} \in (0; 0,238)$ поради $(\max z)'_{\frac{\alpha}{\beta}} > 0$.

Накрая ще дадем необходимите и достатъчни условия за $\min \sigma_p^2$ и $\max z$ по дяловете на активите и възвръщаемостта на портфейла, изразени чрез елементите на дисперсионно - ковариационната матрица и възвръщаемостите на активите за портфейли от два и три актива.

За портфейл от два актива с възвръщаемости R_1 и R_2 и дисперсионно - ковариационна матрица $\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ условията за $\min \sigma_p^2$ са

$$\sigma_{12} < \min\{\sigma_1^2, \sigma_2^2\} \quad \text{и} \quad R_1 \neq R_2.$$

Те осигуряват съществуване и единственост на дялово участие $x^* \in (0,1)$ и портфейлна възвръщаемост $R_p^* \in (\min\{R_1, R_2\}, \max\{R_1, R_2\})$, за които

$$\min \sigma_p^2 = \sigma_p^2(x^*) = \sigma_p^2(R_p^*)$$

като квадратна функция на x или R_p. При това

$$x^* = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 - 2\sigma_{12} + \sigma_2^2} \quad \text{и} \quad R_p^* = \frac{(\sigma_2^2 - \sigma_{12})R_1 + (\sigma_1^2 - \sigma_{12})R_2}{\sigma_1^2 - 2\sigma_{12} + \sigma_2^2}.$$

Ако към горните условия се добавят и

$$\frac{\alpha}{\beta} < 2\frac{\sigma_1^2 - \sigma_{12}}{R_1 - R_2} \quad \text{при} \quad R_1 > R_2 \qquad \text{или} \qquad \frac{\alpha}{\beta} < 2\frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{R_2 - R_1} \quad \text{при} \quad R_1 < R_2,$$

то съществува единствено дялово участие

$$x^{**} = x^* + \frac{\frac{\alpha}{2\beta}(R_1 - R_2)}{\sigma_1^2 - 2\sigma_{12} + \sigma_2^2}$$

такова, че $x^{**} \in (0,1)$ и $\max z = z(x^{**})$.

За портфейл от три актива $A_i, i = 1,2,3$ с възвръщаемости $R_i, i = 1,2,3$, дялови участия $x_1, x_2, 1 - x_1 - x_2$ и дисперсионно - ковариационна матрица $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_3^2 \end{pmatrix}$ условието за съществуване на $\min \sigma_p^2$ по x_1 и x_2 е

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2\sigma_{13} & \sigma_3^2 + \sigma_{12} - \sigma_{13} - \sigma_{23} \\ \sigma_3^2 + \sigma_{12} - \sigma_{13} - \sigma_{23} & \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\sigma_{23} \end{vmatrix} > 0.$$

Екстремалната точка е $M(x_1^*, x_2^*)$, където $x_1^* = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2^* = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$ и

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \sigma_3^2 - \sigma_{13} & \sigma_{12} - \sigma_{23} \\ \sigma_3^2 - \sigma_{23} & \sigma_2^2 - \sigma_{23} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \sigma_3^2 - \sigma_{23} & \sigma_{12} - \sigma_{13} \\ \sigma_3^2 - \sigma_{13} & \sigma_1^2 - \sigma_{13} \end{vmatrix}.$$

Неравенствата $x_1^* > 0$, $x_2^* > 0$ и $x_1^* + x_2^* < 1$ налагат условията $\Delta_i > 0, i = 1,2,3$, където $\Delta_3 = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 - \sigma_{13} & \sigma_{12} - \sigma_{23} \\ \sigma_{12} - \sigma_{13} & \sigma_2^2 - \sigma_{23} \end{vmatrix} = \Delta - \Delta_1 - \Delta_2$. От свойствата на детерминантите следва, че $\Delta_i = \Sigma_{j=1}^3 A_{ij}$, $i = 1,2,3$, където A_{ij} са адюнгираните количества на елементите на матрицата Σ. Следователно, неравенствата $\Delta_i > 0, i = 1,2,3$ са необходимо и достатъчно условие за съществуване и единственост на точката $M(x_1^*, x_2^*)$ в отворения триъгълник $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ и $x_1 + x_2 < 1$.

Намирането на $(\min \sigma_p^2)_{x_1}$ или $(\min \sigma_p^2)_{x_2}$ като квадратна функция на портфейлната възвръщаемост R_p е възможно точно когато $R_3 \neq R_1$ или $R_3 \neq R_2$. Изразяването на x_1 и x_2 чрез R_p и неравенствата $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ и $x_1 + x_2 < 1$ определят интервал на изменение на R_p, който е подинтервал на $(\min\limits_{i=1,2,3}\{R_i\}, \max\limits_{i=1,2,3}\{R_i\})$.

Условието за съществуване на екстремална точка $N(x_1^{**}, x_2^{**})$ за функцията $z = \alpha R_p - \beta\sigma_p^2$ е $\Delta > 0$. Координатите на точката N са

$$x_1^{**} = x_1^* + 2\frac{\alpha}{\beta}\frac{\begin{vmatrix} R_1 - R_3 & \sigma_3^2 + \sigma_{12} - \sigma_{13} - \sigma_{23} \\ R_2 - R_3 & \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\sigma_{23} \end{vmatrix}}{\Delta},$$

$$x_2^{**} = x_2^* + 2\frac{\alpha}{\beta}\frac{\begin{vmatrix} \sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2\sigma_{13} & R_1 - R_3 \\ \sigma_3^2 + \sigma_{12} - \sigma_{13} - \sigma_{23} & R_2 - R_3 \end{vmatrix}}{\Delta}.$$

Неравенствата $x_1^{**} > 0$, $x_2^{**} > 0$ и $x_1^{**} + x_2^{**} < 1$ определят интервала на изменение на $\dfrac{\alpha}{\beta}$ за съществуване на $\max z = z(x_1^{**}, x_2^{**})$. Изменението на $\max z$ в зависимост от α, β и $\dfrac{\alpha}{\beta}$ по технически причини се изследва във всеки конкретен случай.

Библиография

[1] Балабанов, И., Риск-менеджмент, Издательство “Финансы и статististика”, Москва, 1996.

[2] Боди, З., А. Кейн, А. Дж. Маркъс., Инвестиции (превод от англ. език, трето издание), Натурела АД, С., 2000.

[3] Боди, З., Р. Мертон., Финанси (превод от англ.). Уч. пос. Издательский дом „Вильянс Москва, 2000.

[4] Брукс, Ал., Технически анализ на ценовото движение – за сериозния трейдър. Да четем ценовите графики бар по бар. (превод от англ.), Издателство „Сиела Норма“ АД, С., 2013.

[5] Бъфет, М., Д. Кларк., Уорън Бъфет и анализът на финансови отчети (превод от англ. език), Издателство „Изток – Запад”, С., 2011.

[6] Владимиров, В. А., Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б. и др., Управление риском: Риск. Устойчивое развитие. Синергетика, Издательство “Наука”, Москва, 2000.

[7] Георгиев, И., Основи на инвестирането (второ преработено и допълнено издание). Университетско издателство „Стопанство”, С., 1999.

[8] Георгиев, И., Управление на риска в индустриалните проекти. – Икономически алтернативи, бр. 4, 2008, 13 – 29.

[9] Георгиева, П., И. Попчев., Ефективно разпределение на финансовите ресурси: два подхода от софт компютинг. В: Сборник с доклади от юбилейната научно-практическа конференция с международно участие “Времена на несигурност и рискове: възможности и перспективи за развитие”, том I, Пловдив, 7-8 ноември 2014. Университетско издателство “П. Хилендарски”, Пловдив, 2015, 293-300, ISBN 978-619-202-036-1.

[10] Димитрова, Р., И. Данева, Е. Калчев, Р. Димитрова, К. Костенаров., Въведение във финансите. Издателство на Нов български университет. С. 2012.

[11] Дочев, Д., Теория на риска, Варна, 1999.

[12] Драганов, Х., Управление на риска. Издателство „Тракия-М”, С., 2003.

[13] Драганов, Х., Г. Димитров, Управление на риска, Издателство “Тракия-М”, София, 2009.

[14] Йовкова, й., Б. Петков, Финансова математика (второ преработено и допълнено издание). Издателство „Нова звезда”, С., 2001.

[15] Левисън, М., Финансови пазари. Пътеводител (трето издание, превод от англ. език). Издателство „Класика и стил“ ООД, С., 2004, 326 стр.

[16] Манев, М., Р. Русева, Управление при кризи и конфликти, Издателство “Софт Трейд”, София, 2005.

[17] Манов, Б., Основи на финансите. Пари и банково дело. Теория и практика. Издателство „Нов живот“, С., 2012.

[18] Манов, Б., Основи на финансите. Публични финанси, застраховане и социално осигуряване. Теория и практика. Издателство „Нов живот“, С., 2012.

[19] Матеев, М., Анализ и оценка на риска при избор на инвестиционни решения (второ издание), Университетско издателство “Стопанство”, София, 2000. Минасян, Г. Финансово програмиране (второ преработено и допълнено издание), ИК „Горекс прес“, С., 2004.

[20] Михайлов, Е., А. Ангелов, Ж. Вътев, Б. Кръстев, Г. Георгиев., Практически банков мениджмънт. Издателство „АБАГАР”, Велико Търново, 2002.

[21] Мишкин, Ф., Теория на парите, банковото дело и финансовите пазари (превод от англ. език). Издателство „Отворено общество”, С., 1999.

[22] Николова, Н., Обща теория на финансите. „Сиела – Софт енд паблишинг”, С., 2002.

[23] Орешарски, П., Инвестиции: Анализ и управление на инвестиционни портфейли, “ЕА” АД, Плевен, 2009.

[24] Парушев, С., Облигации. Примери и таблици за изчисление (първо издание). PRINCEPS, Варна, 1995.

[25] Петранов, С., Инвестиции. Издателство „Класика и стил”, С., 2010.

[26] Петрова, И., Сделки с ценни книжа или как да ги купуваме и продаваме изгодно. PRINCEPS, Варна, 1993.

[27] Петров, Г., Е. Райков, Е. Цанкова, Г. Маринков, И. Костов, К. Шутилова-Йочколовска, М. Главева, М. Георгиева, Р. Маринова, Р. Борисова, Р. Радев, Т. Петкова., Корпоративни финанси. Кратък курс. Трето допълнено издание. Издателство „Тракия-М“, С., 2010.

[28] Попчев, И., Многокритериален избор на проектни решения: Някои практически алгоритми. В: „Финансови решения: Изследвания и практики”. Издателство на Нов български университет, С., 2009.

[29] Попчев, И., Шест теми по управление на риска. ЛКНТ No. 1, ИИКТ – БАН, 2016, eISSN: 2367-8666, eISBN: 978-954-91700-8-5, 73.

[30] Попчев, И., Рискът в Новата парадигма. В: „Мениджмънт и лидерство" (под ред. на доц. д-р Д. Панайотов). Издателство на Нов български университет. С., 2008.

[31] Попчев, И., Стратегии за управление на риска (записки на лектора), НБУ - ЦДО, 2004.

[32] Попчев, И., Н. Велинова., Модели за оптимално хеджиране на портфейли от ценни книжа. – Икономика, год. LX, 2006, бр. 3, 88-91, ISSN: 1312-2428.

[33] Попчев, И., Н. Велинова., Конструиране на неутрални портфейли от ценни книжа. – Икономически алтернативи, 2006, бр. 5 (76), 15-29, ISSN: 1312-5281.

[34] Попчев, И., Н. Велинова., Управление на риска на портфейли от ценни книжа чрез оптимално хеджиране. – Икономически алтернативи, 2008, бр. 1, 7-12, ISSN: 1312-5281.

[35] Попчев, И., И. Радева., Иммунизация портфеля облигации: технология конструирования. Труды международной научно-практической конференции ТАС – 2001. - Ноябрь, Москва, 2001, том. II, с. 120 – 121, РАН – Москва.

[36] Попчев, И., Internet of things и рискове. В: МАТТЕХ 2012 сборник научни трудове, том 2. Университетско издателство "Епископ Константин Преславски" Шумен, 2012, с. 488. ISSN: 1314 – 3912.

[37] Попчев, И., И. Радева., Финансови пазари и алтернативни системи за търговия. Информационен мениджмънт на предприятието. Сборник от доклади от симпозиум с международно участие. Икономически университет – Варна – БАН. Университетско издателство Икономически университет Варна, 2002.

[38] Попчев, И., И. Радева., Управление на облигационни портфейли: анализ и приложение на модел за многопериодна имунизация. - Икономическа мисъл, XLIX, 2004, No. 4, 28-43, ISSN: 0013-2993.

[39] Попчев, И., И. Радева., Изследване на характеристиките на доходността и ценовата чувствителност на облигации с фиксиран доход. В: Научни трудове на Факултета по икономически и социални науки на ПУ "П. Хилендарский", годишник No. 3, Пловдив, 2004, 5-18.

[40] Попчев, И., И. Радева., Имунизацията – стратегия за управление на активите и задълженията. В: Годишник 2005 „Икономика и бизнесадминистрация: методология, интердисциплинарност, анализи, стратегии", Издателство на Нов български университет, 2005, София, 118-145, ISBN: 954-535-329-5.

[41] Попчев, И., И. Радева., Накратко за възможностите на кредитните деривативи. В: Финансови иновации – изследвания и практики, Издателство на Нов български университет, 2008, София, 115-135, ISBN: 978-954-535-502-8.

[42] Попчев, И., Турбулентност, решения и афоризми. В: „Списание на Българската академия на науките", CXXIII, бр. 6, 2010, 85-89.

[43] Попчев, И., Т. Стоилов, К. Тенекеджиев, К. Стоилова, Н. Николова, З. Иванова, И. Радева, Е. Тричкова, Б. Стоянов, Ч. Бечев, М. Полименов, Н. Джеджев, В. Желев., Инвестиционен анализ и портфейлна оптимизация: Теория и практика. ИК Море, Варна, 2010, 150. ISBN 978-954-9722-13-0.

[44] Пътев, П., Н. Канарян., Управление на портфейла. Издателство „АБАГАР", В. Търново, 2008.

[45] Пътев, П., Н. Канарян, Управление на портфейла. Издателство "Абагар", В. Търново, 2008.

[46] Радева, Ирина., Многоетапна схема за оценка на инвестиционна привлекателност. - Финансови иновации – изследвания и практики. Издателство на НБУ - София, 2008, с. 135 – 155. ISBN 978-954-535-502-8.

[47] Радева, Ирина., Използване на система от балансирани показатели при многокритериална оценка на инвестиционната привлекателност. Научно – практическа конференция „Корпоративните финанси днес и утре", Нов Български Университет, 28 – 29 септември 2009, София, с. 162 – 175.

[48] Славов З., М. Брусева, Анализ на риска при вземане на финансови решения, ВСУ "Черноризец Храбър", Университетско издателство, 2011.

[49] Стоянов, С., Фючърси, опции и синтетични ценни книжа. Издателство „Тракия-М", С., 1999.

[50] Талеб, Н. Н., Надхитрени от случайността: Скритата роля на случайността в живота и на пазара. Издателска къща „ИнфоДар" ЕООД, С., 2009.

[51] Талеб, Н. Н., Черният лебед: Въздействие на слабо вероятното в живота и на пазара. Издателска къща „ИнфоДар" ЕООД, С., 2009.

[52] Random Цончев, Р., Финансови изчисления. Издателство на Нов български университет, С., 2009.

[53] Шарп, У. Ф., Г. Дж. Александер, Д. В. Бэйли., Инвестиции (превод от англ. език). Издательский дом „ИНФРА-М", Москва, 1999.

[54] Янкова, Т., Приложна математика: финансова математика. УИ "П. Хилендарски", Пловдов, 2014, 204.

[55] Ackert, L. F., R. Deaves., Behavioral Finance: Psychology, Decision-Making and Markets. South-Western, Cengage Learning, Mason, OH, 2010.

[56] Daigler, R., Financial Futures Markets. Concepts, evidence, and applications. Harlet Collins College Publishers, N.Y., 2003.

[57] Elliott, R., P. Kopp., Mathematics of Financial Markets. Springer-Verlag New York Inc., 1998.

[58] Elton E., M. Gruber, Modern Portfolio Theory and Investment Analysis, New York, John Wiley & sons Inc., 6th edition, 1995.

[59] Fabozzi, F., Bond portfolio management (second edition), Frank J. Fabozzi Associates New Hope, Pennsylvania, 2001.

[60] Georgieva, P., I. Popchev., Application of Q-Measure in a Real Time Fuzzy System for managing Financial Assets. International Journal of Soft Computing (IJSC), Vol. 3, 2012, No. 4, 21-38.

[61] Georgieva, P., I. Popchev, S. Stoyanov., A Multi-Step Procedure for Asset Allocation in Case of Limited Resources. - Cybernetics and Information Technologies Vol. 15, No 3, 2015, 41-51, Print ISSN: 1311-9702, Online ISSN: 1314-4081, DOI: 10.1515/cait-2015- 0040.

[62] Georgieva P., I. Popchev., Cardinality Problem in Portfolio Selection. – Lecture Notes in Computer Science 7824. Adaptive and Natural Computering Algorithms. Proceedings 11th International Conference, ICANNGA 2013, Lausanne, Switzerland, April 4-6, 2013. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013, pp. 208-217. ISBN 978-3-642-37212-4.

[63] Georgieva P., I. Popchev., Fuzzy Q-measure Model for Managing Financial Investments. - Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences, tome 66, 2013, No5, 651-658. ISSN 1310-1331.

[64] Hull, J., Option, Futures, and Other Derivative Securities. Prentice-Hall Inc., New Jersey, 2000.

[65] Ivanova, Z., K. Stoilov, T. Stoilov., Portfolio Optimization – Internet Information Service. Sofia, Academic Publishing House "Prof. M. Drinov", 2005. 275 p. ISBN 954-322-021-2 (in Bulgarian).

[66] Jorion, P., Financial Risk Manager Handbook. J. Wiley Publishing, N.Y., 2003.

[67] Markowitz, H., Portfolio selection, Journal of Finance, March, Vol. 7 Issue I, 1952, 77–91.

[68] Markowitz, H. M., Portfolio Selection. Efficient Diversification of Investments (second ed.), Blackwell Publishers, Inc., Cambridge, MA, and Oxford, UK, 1995, 384.

[69] Marshall, J., V. Bansal., Financial Engineering. New York Institute of Finance, Allyn and Bacon Inc., N.Y., 1992.

[70] Mastering Risk. Volume 1. Concepts (executive editor James Pickford). Financial Times Mastering Pearson Education Limited, N.Y., 2001.

[71] Popchev, I., I. Radeva., An investment preference under incomplete data. In: Proceedings DECOM-TT 2004, Automatic Systems for Bulding the Infrastructure in Developing Countries, Regional and Global Aspects (Bansko, Bulgaria October 3-5, 2004), 2004, 243-248.

[72] Popchev, I., I. Radeva., Decision support system for investment preference evaluation under conditions of incomplete information. In: Proc. 3rd Intern. Conference "Information Research, Applications and Education" (Ed. K. Markov), 27-30 June 2005, Varna, 189-190.

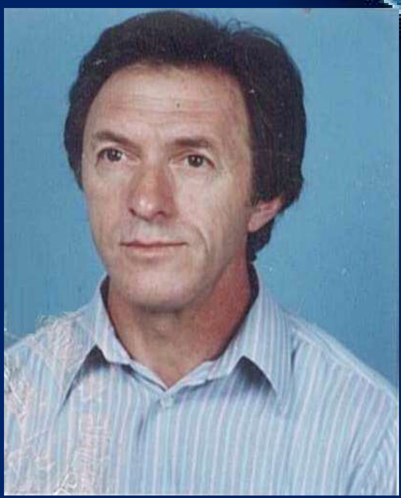
[73] Popchev, I., I. Radeva., A decision support method for investment preference evaluation. – Cybernetics and Information Technologies, Vol. 6, 2006, No. 1, 3-16, ISSN: 1311-9702.

[74] Popchev, I., N. Velinova., Application of Monte Carlo simulation in princing of options. - Cybernetics and Information Technologies, Vol. 3, 2003, No. 2, 74-91, ISSN: 1311-9702.

[75] Popchev, I., N. Velinova., Popchev, I., N. Velinova. Software decision for neutral portfolio of securities. - Cybernetics and Information Technologies, Vol. 5, 2005, No. 1, 14-34, ISSN: 1311-9702.

[76] Reilly F.K., K.C. Brown, Investment Analysis and Portfolio Management, South-Western College Publications, 7th edition, 2002.

Предложеният материал е практическо ръководство по дисциплината *„Анализ на риска"*, която се преподава на



бакалаври от Факултета по икономически и социални науки към Пловдивския университет „Паисий Хилендарски" и неговите филиали в Кърджали и Смолян за специалностите Стопанско управление, Маркетинг, Финанси, Макроикономика, Счетоводство и Международни икономически отношения. То се използва и по дисциплината *„Управление на риска"* в магистърските програми „Финансов мениджмънт", „Финанси и застраховане", както и от докторанти и специализанти на факултета по икономически и социални науки към Пловдивския университет „Паисий Хилендарски".

Акцентът в ръководството е поставен върху отделни елементи от анализа и управлението на портфейл от финансови активи. Използван е основно подходът на Х. Марковиц за портфейл от три и повече активи с дадени възвръщаемости и дисперсионно - ковариацонна матрица.

Настоящото практическо ръководството може да се използва от всички с интереси в теорията на портфейла и нейните приложения за решаване на изследователските и практическите проблеми на риска в неговите многоаспектни прояви. Участниците на капиталовите пазари могат да намерят в ръководството и подходящи решени примери за управление на финансови активи.

eISSN 2367-8666