3

IICT – BAS

eISSN: 2367-8666

Lecture Notes in Computer Science and Technologies

Eléments de la théorie des probabilités

Manuel de travaux dirigés

Vera Angelova

eISBN: 978-954-91700-0-9

The series **Lectures Notes in Computer Science and Technologies of the Institute of Information and Communication Technologies at the Bulgarian Academy of Sciences** presents in an electronic format textbooks for undergraduate, graduate and PhD students studied various programs related to Informatics, Computational Mathematics, Mathematical Modeling, Communication Technologies, etc., as well as for all readers interested in these scientific disciplines. The Lecture Notes are based on courses taught by scientists of the Institute of Information and Communication Technologies - BAS in various Bulgarian universities and the Center for Doctoral Training in BAS. The published materials are with open access - they are freely available without any charge.

eISSN: 2367-8666

Avec la collaboration de madame Viviane Baligand et monsieur François Mimiague - Professeur à l'Université de Bordeaux IV, qui ont posé les basses de l'enseignement en Statistique au programme français de la Faculté de gestion et d'économie à l'Université de Sofia.

Table des matières

Chapitre 1

Algèbre des événements

1.1 Synthèse

- **Expérience aléatoire :** toute expérience qui satisfait les conditions suivantes
  - on ne peut pas prévoir avec certitude (avant l'expérience) le résultat de l'expérience, mais ce résultat est clairement identifiable ;
  - on peut décrire, avant l'expérience, l'ensemble de tous les résultats possibles.

• **Éventualité ou événement élémentaire :** Le résultat d'une expérience constitue une éventualité ou un événement élémentaire

• **Univers, Ensemble fondamental :** c'est l'ensemble de toutes les issues (ou résultats) possibles de l'expérience aléatoire, c.à.d. de toutes les éventualités. Cet ensemble est désigné en général par Ω.

Un ensemble fondamental peut être

- **discret :**
  - **ensemble fini** - s'il contient un nombre fini de résultats (jet d'une pièce de monnaie $\Omega = \{$F,P$\}$, jet d'un dé $\Omega = \{$1,2,3,4,5,6$\}$)
  - **ensemble infini dénombrable** - on peut numéroter chacun des résultats, dont le nombre est infini (nombre de jets d'un dé jusqu'à l'obtention un six)..
- **continu :** si l'ensemble est infini non dénombrableprésenté par une intervalle (observation de poids, de taille, de temps $\Omega = [35^o\mathrm{C}, 42^o\mathrm{C}]$).

Exemples

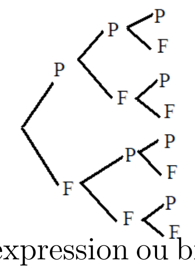
— Le lancer du dé est une expérience aléatoire . Son ensemble fondamental : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

— Le lancer d'une pièce de monnaie : $\Omega = \{P, F\}$

— La naissance d'un enfant : $\Omega = \{$Fille. Garçon$\}$

— Le lancer de 3 pièces de monnaie discernables :

$\Omega = \{(P, P, P), (P, P, F), (P, F, P), (P, F, F),$
$(F, P, P), (F, P, F), (F, F, P), (F, F, F)\}$
Le diagramme en arbre de cette expérience aléatoire est :



• **Evénement** tout sous-ensemble de Ω. Se détermine par une expression ou bien en énumérant

ses éléments. Un événement se réalise si le résultat de l'expérience aléatoire appartient à son ensemble. L'événement élémentaire est tout sous -ensemble de Ω qui ne comprend qu'une seule éventualité.
Remarques :

- Evénements particuliers :.

L'événement certain Ω. Il se réalise quelle que soit l'issue de l'expérience aléatoire.

L'événement impossible $\emptyset$: il ne se réalise jamais.
Exemple Jet d'un dé. L'événement : "le résultat est positif" est un événement certain. L'événement : "le résultat est négatif " est un événement impossible.

- Des événements qui peuvent surgir simultanément lors d'une expérience aléatoire s'appellent des **événements compatibles**. Si la réalisation d'un événement A exclut la réalisation d'un autre B, ces deux événements sont **incompatibles**. Les ensembles de A et B sont disjoints $A \cap B = \emptyset$.

- **Système complet d'événements :** considérons une classe d'événements incompatibles (mutuellement exclusifs) tels que leur réunion donne Ω. Ces événements définissent une partition $\mathcal{P}(\Omega)$ de Ω.
Une telle classe est appelée *système complet d'événements*.

- **Complémentaire (ou contraire) :** Deux événements incompatibles qui forment un système complet d'événements, s'appellent des **événements complémentaires**. L'événement complémentaire de l'événement E est noté $\bar{E}$.L'événement complémentaire $\bar{E}$ se réalise lorsque E ne se réalise pas. $E \cap \bar{E} = \emptyset$, $E \cup \bar{E} = \Omega$. E et $\bar{E}$ définissent une *partition* de Ω.

Attention : Deux événements contraires sont incompatibles, mais 2 événements incompatibles ne sont pas nécessairement contraires.

- **Opérations sur les événements**

Soit A et B deux événements aléatoires. Les événements $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $\Omega \backslash A$ sont des événements aussi.
L'événement (A union B) $/A \cup B/$ se réalise si le résultat de l'expérience appartient à l'union des ensembles A et B c'est à dire s'il appartient à A ou à B.
L'événement (A inter B) $/A \cap B/$ se réalise si le résultat de l'expérience appartient à l'intersection des ensembles A et B c'est à dire s'il appartient à A et à B.
L'événement (A moins B) $/A \backslash B/$ se réalise si le résultat de l'expérience appartient à la différence des ensembles A et B c'est à dire s'il appartient à A mais n'appartient pas à B.
L'événement (Ω moins A ou A complémentaire) $/\Omega \backslash A = \bar{A}/$ se réalise si et seulement si A n'est pas réalisé.
Exemple
Jet d'un dé. On s'intéresse du nombre de points sur la face supérieure. L'univers de cette expérience aléatoire est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Soit les événements : $A =$ "Le résultat obtenu est pair :, $A = \{2, 4, 6\}$
$B =$ "Le résultat obtenu est supérieur ou égal à 4", $B = \{4, 5, 6\}$
$A \cup B =$ "le résultat obtenu est pair ou supérieur ou égal à 4", $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$
$A \cap B =$ "le résultat obtenu est pair et supérieur ou égal à 4 ", $A \cap B = \{4, 6\}$

$A \backslash B$ = "Le résultat obtenu est pair mais n'est pas supérieur ou égal à 4", $A \backslash B = \{2\}$
$\bar{A}$ = "le résultat est impair", $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$

Exemple
Lance d'une pièce de monnaie 3 fois de suite. L'univers est $\Omega = \{(P, P, P), (P, P, F), (P, F, P), (P, F, F), (F, P, P), (F, P, F), (F, F, P), (F, F, F)\}$. Soit A = "Le nombre de F est strictement supérieur au nombre de P" $= \{(F, F, F), (F, F, P), (F, P, F), (P, F, F)\}$; B = "Le nombre de F est strictement inférieur au nombre de P" $= \{(P, P, P), (P, P, F), (P, F, P), (F, P, P)\}$; C = "Il y a exactement une F" $= \{P, P, F), (P, F, P), (F, P, P)\}$.
Les événements A et B sont incompatibles, car $A \cap B = \emptyset$ et contraires : $\bar{A} = B$: $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$
Les événements A et C sont incompatibles : $A \cap C = \emptyset$, mais non pas contraires, car $A \cup C \neq \Omega$.

- **Lois des opérations entre événements :** Soit A, B, et C des événements quelconques.

Les lois suivantes sont respectées :
$A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$ - commutative
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C)$ - associative
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ - distributive
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ - lois de Morgan.

- **Propriétés de l'intersection** ($\cap$)

$A \cap \bar{A} = \varnothing$	événements incompatibles
$\Omega \cap A = A$	élément neutre (Ω)
$\varnothing \cap A = \varnothing$	élément absorbant ($\varnothing$)
$A \cap B = B \cap A$	commutativité
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	associativité
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	distributivité avec la réunion ($\cup$)

- **Propriétés de la réunion** ($\cup$)

$A \cup \bar{A} = \Omega$	événements complémentaires
$\varnothing \cup A = A$	élément neutre ($\varnothing$)
$\Omega \cup A = \Omega$	élément absorbant (Ω)
$A \cup B = B \cup A$	commutativité
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	associativité
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	distributivité avec l'intersection ($\cap$)

Test sur le chapitre : Espace fondamentale et événements

Vocabulaire fondamental
1. Qu'est-ce que signifient les symboles : Ω, $\emptyset$, $\bar{A}$, $A \cup B$, $B \cap A$
2. Quelles conditions doit vérifier une expérience pour être expérience aléatoire ?
Donnez la définition d'une expérience aléatoire.
3. Donnez la définition de l'ensemble fondamental. Que peut-être-t-il ?
4. Décrivez l'événement ? Donnez un exemple pour le jet d'un dé.

Algèbre des événements
5. Quand dit-on que deux événements sont incompatibles ?
Les événements $A \cap B$ et $A \cap \bar{B}$ le sont-ils ?

Visualisez les deux événements précédents.
6. Qu'est-ce que l'événement complémentaire ?
Donnez le contraire de l'événement $A =$ "toutes les boules choisies sont rouges".
7. Quand dit-on que deux événements sont indépendants ?
8. Ecrire l'ensemble fondamental (l'univers) de l'épreuve :
(a) Le lancer du dé
(b) Le lancer d'une monnaie
(c) Le lancer trois fois d'une pièce de monnaie
(d) Le lancer de trois pièces de monnaie
(e) La naissance d'un enfant
(f) On lance un dé jusqu'à ce qu'on aie un 6 sur la face supérieure. Ω est le nombre de jets ainsi réalisés
9. Soient A, B, et C trois événements de l'univers Ω. Traduire en termes ensemblistes (en utilisant uniquement les symboles d'union, d'intersection et de passage au complémentaire, ainsi que A, B et C) les événements suivants :
(a) Seul A se réalise .
(b) A et B se réalisent, mais pas C.
(c) les trois événements se réalisent .
(d) au moins l'un des trois événements se réalise .
(e) au moins deux des trois événements se réalisent .
(f) aucun ne se réalise .
(g) au plus l'un des trois se réalise .
(h) exactement deux des trois se réalisent .
(i) A ou B se réalisent, mais pas en même temps.

Explication : "moins de" = "$<$" ; "au moins" = "$\geq$" ;
"plus de" = "$>$" ; "au plus" = "$\leq$".

1.2 Problèmes

1. Déterminer l'Univers pour les expériences aléatoires suivantes :

Expérience aléatoire	**Observation**	**Univers**
a) Jeter une pièce de monnaie	coté visible	
b) Jeter un dé	point sur la face supérieure	
c) Jouer au football	résultat du match	
d) Sélectionner une pièce	conformité	
	couleur	
e) Tirer une carte d'un jeu	"couleur"	
	valeur	
f) Tirer une boule d'une urne avec des boules noires, blanches et rouges	couleur de la boule tirée	
g) Choisir une famille avec 3 enfants	sexe par âge croissant	
h Choisir une famille avec 3 enfants	sexe des enfants	

2. Jet d'une paire de dés. Donner une phrase désignant :
   a) un événement élémentaire ;
   b) un événement impossible ;
   c) deux événements incompatibles ;
   d) un événement et son contraire.
3. On jette un dé et une pièce de monnaie une fois. Donner en extension les événements suivants :
   a) $A =$ "Pile et un nombre paire arrivent"
   b) $B =$ "Face et un nombre impaire arrivent"
   c) $C =$ "Un nombre premier arrive"
   d) A et C se produisent simultanément
   e) Au moins l'un des événements A, B et C se produit.
4. On considère l'expérience aléatoire "jet d'un dé". $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On désigne par A l'événement "le point obtenu est impaire" ; par B l'événement "le point obtenu est inférieur à 4". Définir l'ensemble fondamentale et les événements suivants : a) A ; b) B ; c) $\bar{A}$; d) $\bar{B}$; e) $A \cap B$; f) $A \cup B$; g) $\bar{A} \cap \bar{B}$; h) $\bar{A} \cap B$; i) $\bar{A} \cup B$ et donner les éventualités de chacun de ces événements.
5. Les dix cartons représentés ci-dessous sont mélangés dans un sac. On tire un des cartons et on note le nombre figurant sur le carton.

259	487	828	241	129	695	249	209	852	479

   Quel est l'univers des possibles éventualités de cette expérience aléatoire ?
   Pour chacun des événements suivants, écrire la liste des éventualités :
   A : "le nombre commence par 2" ; B : "le nombre finit par 9" ; C : "le nombre contient

un 3" ; D : "le nombre contient un 2 :; E : "le nombre finit par 2" ; F : "le nombre ne contient pas de 2" ; G : "le nombre est compris entre 100 et 900 :; H : "le nombre est compris entre 700 et 800.

Définir par une phrase chacun des événements suivants : $B \cap D$; $B \cup D$; $\bar{B} \cap D$; $B \cup \bar{D}$.

Ecrire à l'aide des événements définis, les événements suivants :
I : "le nombre commence par 2 et finit par 9" ; J : "le nombre commence par 2 ou finit par 9" ; K : "le nombre ne commence pas par 2 et ne finit pas par 9" ; L : "le nombre ne commence pas par 2 ou ne finit pas par 9.

Algèbre des événements. Indications et résultats

1. a) $\Omega = \{F, P\}$;
b) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
c) $\Omega = \{0 : 0; 0 : 1, 0 : 2, 0 : 3, \ldots, 1 : 0, 1 : 1, \ldots\}$;
d) $\Omega = \{$défectueuse, correcte$\}$;
e) couleur : $\Omega = \{$rouge, noire$\}$; "couleur" : $\Omega = \{$ le trèfle $\clubsuit$, le carreau $\diamondsuit$, le cœur $\heartsuit$, le pique $\spadesuit\}$; valeur : $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, A, J, D, K\}$;
f) $\Omega = \{n, b, r\}$;
g) $\Omega = \bar{A}_2^3 = 2^3 = 8 = \{(ggg), (ggf), (gfg), (fgg), (gff), (fgf), (ffg), (fff)\}$

2. a) "la somme des deux dés est égale à 2" ;
b) "la somme des deux dés est égale à 13" ;
c) "la somme des deux dés est paire" et "la somme des deux dés est égale à 5" ;
d) "la somme des deux dés est paire" et "la somme des deux dés est impaire.

3. $\Omega = \{(P, 1), (P, 2), \ldots, (P, 6), (F, 1), (F, 2), \ldots, (F, 6)\}$
a) $A = \{(P, 2), (P, 4), (P, 6)\}$; b) $B = \{(F, 1), (F, 3), (F, 5)\}$
c) $C = \{(P, 1), (P, 2), (P, 3), (P, 5), (F, 1), (F, 2), (F, 3), (F, 5)\}$
d) $A \cap C = \{(P, 2)\}$
e) $A \cup B \cup C = \{(P, 1), (P, 2), (P, 3), (P, 4), (P, 5), (P, 6), (F, 1), (F, 2), (F, 3), (F, 5)\}$

4. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
a) $A = \{1, 3, 5\}$;
b) $B = \{1, 2, 3\}$;
c) $\bar{A} = \{2, 4, 6\}$;
d) $\bar{B} = \{4, 5, 6\}$;
e) $A \cap B = \{1, 3\}$;
f) $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$;
g) $\bar{A} \cap \bar{B} = \{4, 6\}$;
h) $\bar{A} \cap B = \{2\}$;
i) $\bar{A} \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

5. $\Omega = \{259, 487, 828, 241, 129, 695, 249, 209, 852, 479\}$
$A = \{259, 241, 249, 209\}$; $B = \{259, 129, 249, 209, 479\}$; $C = \emptyset$; $D = \{259, 828, 241, 129, 249, 209, 852\}$; $E = \{852\}$; $F = \{487, 695, 479\}$; $G = \Omega$; $H; H = \emptyset$.
$B \cap D$: "le nombre finit par 9 et contient un 2" ; $B \cup D$: "le nombre finit par 9 ou contient un 2" ; $\bar{B} \cap D$: "le nombre ne finit pas par 9 et contient un 2" ; $B \cup \bar{D}$: "le nombre finit par 9 ou ne contient pas de 2" ; $I = A \cap B$; $J = A \cup B$; $K = \bar{A} \cap \bar{B}$; $L = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Chapitre 2

Méthodes de dénombrement

2.1 Outils graphiques de dénombrement

2.1.1 Synthèse

A. Deux variables indépendantes : ne dépendent pas l'une de l'autre.
- **Tableau double entrée**
- **Diagramme de Venn**

B. Variables Conditionnées : l'une des variables dépend d'une autre.
- **Arbre pondéré :** permet de traiter des variables conditionnées, lorsqu'on a une succession de choix et chaque choix est pondéré. Le premier niveau de l'arbre sera représenté par la variable non conditionnée et le second par la variable conditionnée.

Règles :
— La loi des nœuds : la somme des coefficients autour d'un nœud est égal à 1 (ou bien à 100%).
— Lorsque l'on suit un chemin sur l'arbre, on multiplie les coefficients.
— Tous les coefficients sont exprimés par un nombre compris entre 0 et 1 (entre 0 et 100%).

C. Succession de choix
- **Arbres de choix** : permit de représenter graphiquement et de dénombrer à cette base des choix d'éléments pris dans un certain ordre :

Règles :
— Les branches au premier niveau indiquent les choix d'un premier élément ;
— Les branches au deuxième niveau indiquent les choix d'un deuxième élément ;
— Etc.

Le nombre des branches au bout de l'arbre correspond au nombre de tous les choix.

Test sur le chapitre : Méthodes de dénombrement. Outils graphiques

1. Un tableau double entrée permet de traiter deux grandeurs de manière

a. conditionnée **b.** simultanée **c.** successive

2. La représentation graphique pour deux variables indépendantes constitue :
/choisissez toutes les réponses qui conviennent/

a. arbre de choix **b.** arbre pondéré **c.** diagramme de Venn **d.** tableau double entrée

3. Complétez la définition de l'arbre de choix.
Un arbre de choix est une représentation graphique qui permet de dénombrer ………
4. Donnez les règles qui régissent un arbre pondéré.
5. Lorsqu'on étudie une succession de choix, on représente les différentes possibilités à l'aide de
/choisissez toutes les réponses qui conviennent/

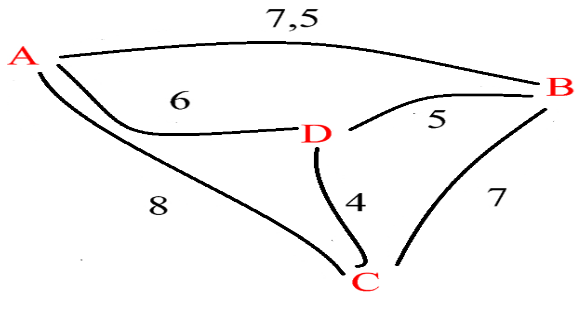
a. arbre **b.** diagramme de Venn **c.** tableau double entrée

2.1.2 Problèmes

6. **Utilisation de diagramme :** Dans une école 2 sports sont proposés aux élèves : le football et le tennis. Parmi ces 100 élèves de l'école, 60 pratiquent le football, 45 pratiquent le tennis et 18 pratiquent le football et le tennis à la fois. Combien d'élèves ne pratiquent aucun des deux sports proposés ?

7. **Utilisation de tableaux à double entrée :** Une population de 100 personnes est classée suivant 2 critères : le sexe (femmes / hommes) et le fait d'être fumeur ou non. On sait que 20 des femmes ne fument pas, que 25 des hommes fument et qu'il y a en tout 37 fumeurs. De combien de femmes et d'hommes est composée cette population ?

8. **Utilisation d'arbre :** Un médecin doit visiter les pacients A , B et C. On connaît la longueur de chaque trajet. On sait par ailleurs qu'il ne repasse pas par son point de départ D - le cabinet. La carte donne les informations suivantes



Dressert l'arbre de choix et déterminer le trajet le plus court et le trajet le plus long.

9. Une commisssion scientifique est composée de trois membres. Le président de la commission veut voter oui à la proposition. Les deux autres membres sont indécis et votent au hasard. Combien sont les cas favorables pour que la décision de la commission soit le oui ?

10. Un jury est composé de cinq membres dont deux ont décidé de s'opposer à la candidature évaluée. Lest trois autres membres votent au hasard. Combien sont les cas favorables pour rejeter la candidature ?

11. Quelques jour avant les élections donnés on sait que presque tous d'un million de votants sont indécis. Deux mille personnes sont opposées à la question soumise au vote. Combien sont les cas favorables pour qu'on rejette cette question ?

Méthodes de dénombrement. Outils graphiques de dénombrement. Indications et résultats

6. 13 élèves ne pratiquent aucun des deux sports proposés ;

7. 32 femmes, 68 hommes ;

8. Le trajet le plus court est DCBA = 18.5 le trajet le plus long - DACB = 21 ;

9. 3 ;

10. 7.

2.2 Formules d'analyse combinatoire

2.2.1 Synthèse

Soit un ensemble $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ à n éléments distincts (tous différents) , $card(\Omega) = n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Sans répétition /sans remise/ $(p \leq n)$ **:**

• Les **arrangements sans répétition**, de p éléments de Ω pris parmi n est une suite ordonnée de p éléments parmi n, et qui ne peuvent pas se répéter : $A_n^p = n!/(n-p)!$.
• Les **permutations sans répétitions**, des n éléments de Ω est une suite ordonnée des n éléments, et qui ne peuvent pas se répéter : $P_n = A_n^n = n!$ (cas particulier $n = p$).
• Les **combinaison sans répétition** de p éléments de Ω sont les ensembles (ou collections) de p éléments distincts, rangés dans n'importe quel ordre, choisis parmi les n éléments de Ω : $C_n^p = A_n^p/p! = n!/p!(n-p)!$

Avec répétition /avec remise/ $(p \leq n$ **ou** $p > n)$ **:**

• Les **arrangement avec répétition** de p éléments de Ω sont les suites de p éléments (distincts ou non), rangés dans un ordre déterminé, choisis parmi les n éléments de Ω : $\bar{A}_n^p = n^p$.

• Les **permutations avec répétition** de p éléments de Ω, pour la répartition $(p_1+p_2+\ldots+p_n)$ sont les suites de p éléments (distincts ou non), rangés dans un ordre déterminé, constituées de : p_1 fois l'élément a_1, p_2 fois l'élément a_2,. . ., p_n fois l'élément a_n, avec $p_1+p_2+\ldots+p_n=p$. Le nombre de permutations est : $\bar{P}_p^{p_1,p_2,\ldots,p_n}=p!/p_1!\,p_2!\,\ldots\,p_n!$.
• Les **combinaisons avec répétition** de p éléments de Ω sont les suites non-ordonnées de p objets choisis parmi les n, qui peuvent se répéter : $\bar{C}_n^p=C_{n+p-1}^p$

Nombre des solutions de l'équation $x_1+x_2+\ldots+x_k=n$
• Nombre des solutions non-négatives : C_{n+k-1}^{k-1}.
• Nombre des solutions entières, positives : C_{n-1}^{k-1}.

$0!=1$, $(n+1)!=n!(n+1)$.
• **Situation additive :** L'opération peut se réaliser de N façons qui peuvent se séparer en k catégories disjointes deux à deux et chacune des catégories peut se réaliser de $n_1,n_2,\ldots,n_k$ façons $\Longrightarrow$: $N=n_1+n_2+\ldots n_k$.
En pratique : on décrit les catégories en les reliant par "ou".

• **Situation multiplicative :** L'opération se décompose en k étapes successives, chacune des étapes pouvant se réaliser respectivement de $n_1,n_2,\ldots,n_k$ façons, $\Longrightarrow N=n_1\,.\,n_2\,.\,\ldots\,.\,n_k$.
En pratique : On décrit la situation par une phrase du type : "**à chaque groupe**" de . . ."on peut associer n'importe quel groupe" de .. . ..

Test sur le chapitre : Méthodes de dénombrement. Formules d'analyse combinatoire

1. S'il s'agit de dispositions ordonnées, les deux dispositions (a,b) et (b,a) sont

   a. différentes **b.** indépendantes **c.** identiques

2. Deux dispositions contenant les mêmes éléments, qui n'occupent pas les mêmes places, sont considérées comme différentes s'il s'agit de dispositions

   a. ordonnées **b.** non ordonnées **c.** identiques

3. Deux dispositions sont considérées comme identiques pourvue qu'elles soient constituées par les mêmes éléments quand il s'agit de dispositions

   a. ordonnées **b.** non ordonnées **c.** conditionnelles

4. Un tableau double entrée permet de traiter deux grandeurs de manière
5. La représentation graphique pour deux variables indépendantes constitue :
/choisissez toutes les réponses qui conviennent/
6 Complétez la définition de l'arbre de choix.
Un arbre de choix est une représentation graphique qui permet de dénombrer . . ..
7. Donnez les règles qui régissent un arbre pondéré.
8. Lorsqu'on étudie une succession de choix, on représente les différentes possibilités à l'aide de
/choisissez toutes les réponses qui conviennent/
9. Que mesurent les symboles A_m^p, C_m^p, $\bar{C}_m^p$?
Calculer A_{10}^3, C_{10}^3, $\bar{C}_{10}^3$.

10. On doit former un comité de 3 femmes et de 2 hommes en choisissant de 7 femmes et de 5 hommes. Quel est le nombre de possibilités si :

(a) Le comité peut inclure n'importe laquelle des femmes et des hommes ?

(b) Une femme particulière doit être élue obligatoirement au comité ?

(c) Deux hommes particuliers doivent être exclu du comité ?

11. Spécifier le mode de tirage (ordonné, non ordonné, simple, avec répétition) des situations de dénombrement les suivant. Déduire les réponses sous forme symbolique et sous forme numérique :
(a) De combien de manières peut-on placer une famille de 6 personnes sur un banc de 6 places ?
(b) De combien de manières peut-on placer une famille de 6 personnes sur un banc de 10 places.
(c) Combien y a-t-il de tiercés dans l'ordre dans une course de 20 chevaux ?
(d) Même question, mais dans le désordre ?
(e) Jet de deux dés indiscernables. On s'intéresse aux nombres affichés par chacun des dés. Combien y-a-t-il de résultats possibles ?
(f) Combien de couples (x, y) d'éléments on peut former des éléments d'un ensemble à n éléments distincts ?
(g) Combien de paires (x, y) d'éléments on peut former des éléments d'un ensemble à n éléments distincts ? ?
12. Développer $(a + b)^8$

2.2.2 Problèmes

12. On dispose des chiffres de 0 à 9.

    a) Combien de numéros de neuf chiffres peut-on en former ?
    b) Combien de numéros de neuf chiffres peut-on en former, dont les premiers 2 chiffres sont fixés en avant ?

13. On doit constituer une équipe composée de 3 surveillants et de 2 ouvriers d'entretien à partir de 4 surveillants et de 5 ouvriers d'entretien.

    a) De combien de façons différentes peut-on constituer cette équipe ?
    b) De combien de façons différentes peut-on constituer cette équipe si le surveillant $S1$ et l'ouvrier $O1$ ne peuvent être élus dans une même équipe ?

14. 8 pavillons alignés verticalement forment un code. Combien de codes différents , peut-on former à partir d'un ensemble de 4 pavillons blancs indiscernables, 3 pavillons rouges indiscernables et un pavillon vert ?

15. Un hommes d'affaires veut placer une somme de 20 M€ sur trois affaires potentielles. Chaque investissement doit être un nombre entier en M€. L'engagement minimal pour chaque affaire est respectivement 2, 3 et 4 M€. Combien de stratégies d'investissement y a-t-il si :

a) les trois affaires doivent être couvertes ?
b) On doit investir sur deux des trois affaires ?

16. Combien y-a-t-il

a) d'anagrammes (permutations) du mot : SCIENCES ?
b) Combien de permutations de 5 lettres pour la répartition (1, 1, 1, 1, 1) ?

17. Jeu de domino. Sur chaque pièce figurent deux chiffres entre 0 et 6 (le 0 est représenté par un blanc). De combien de pièces est coomposé un jeu de dominos ? ?

18. Combien peut-on former d'octets (un octet est un mot de 8 éléments binaires appelés bits) ?

Méthodes de dénombrement. Formules d'analyse combinatoire. Indications et résultats

12. a) I chiffre n'est pas 0 $\rightarrow 9 \times 10^8$; b) I chiffre est 2 $\rightarrow 10^8$

13. a) 40 équipes différentes ; b) 28 équipes différentes sans le couple $(S1\ ,\ O1)$

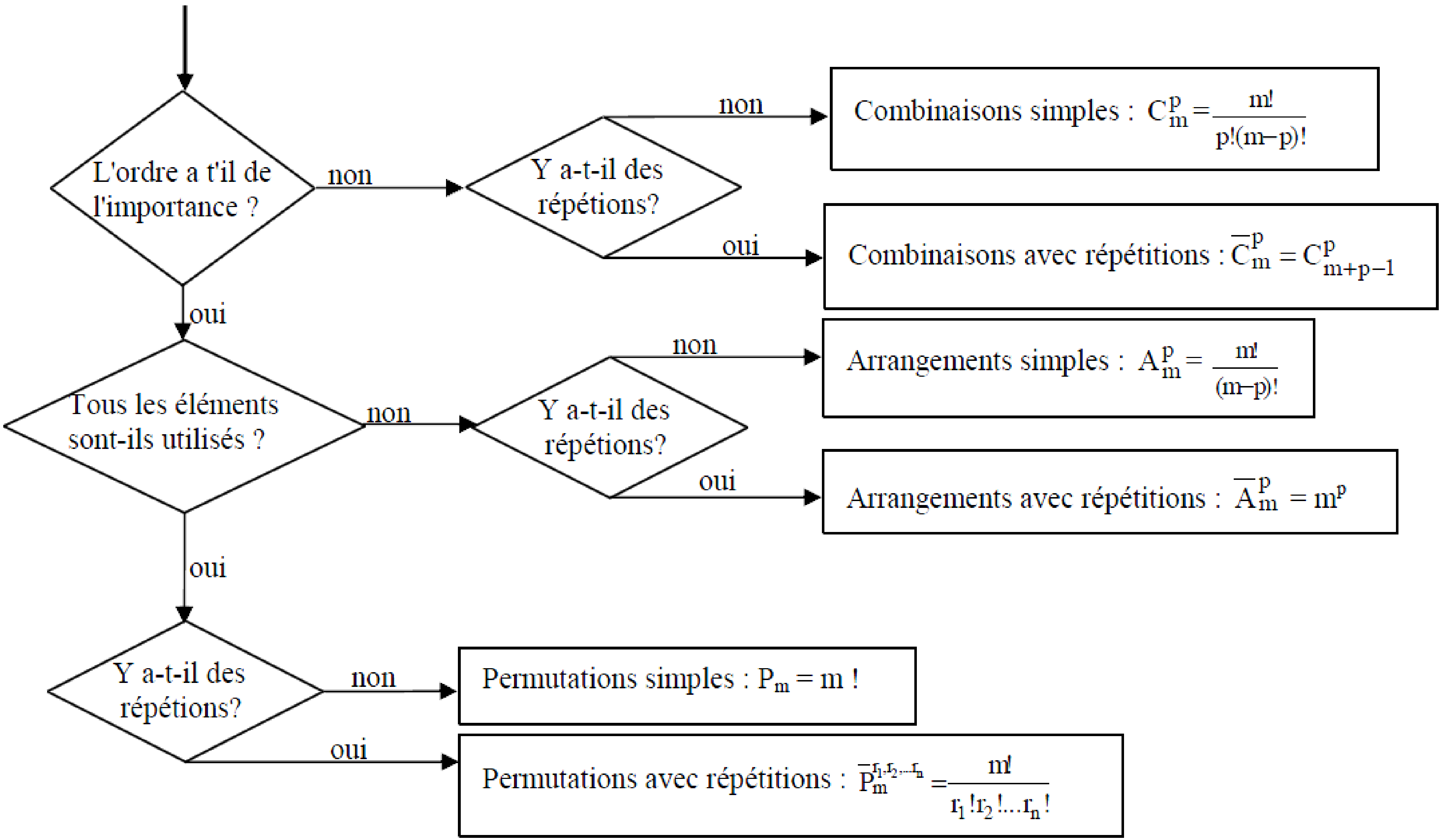
14. 280 signaux différents

15. a) 78 stratégies ; b) 45 stratégies

16. a) 5040 ; b) 5 !

17. 28 pièces

18. 256 octets.


L'ordre a t'il de l'importance ?
non
oui
Y a-t-il des répétions?
non
oui
Combinaisons simples : $C_m^p = \frac{m!}{p!(m-p)!}$
Combinaisons avec répétitions : $\overline{C}_m^p = C_{m+p-1}^p$
Tous les éléments sont-ils utilisés ?
non
oui
Y a-t-il des répétions?
non
oui
Arrangements simples : $A_m^p = \frac{m!}{(m-p)!}$
Arrangements avec répétitions : $\overline{A}_m^p = m^p$
Y a-t-il des répétions?
non
oui
Permutations simples : $P_m = m\,!$
Permutations avec répétitions : $\overline{P}_m^{r_1,r_2,\dots,r_n} = \frac{m!}{r_1!r_2!\dots r_n!}$

Problèmes supplémentaires

19. On dispose des chiffres de 0 à 7. Combien de nombres, commençant par 7 et divisible par 5, peut-on former avec ces chiffres, sans répéter aucun d'eux,
• si les nombres sont de 6 chiffres ?
• si les nombres sont de 8 chiffres ?
Réponses : 720 ; 1440

20. Cinq hommes, quatre femmes et trois enfants doivent s'asseoir à une rangée de douze places. De combien de façons différentes ils peuvent le faire
a) s'ils peuvent s'asseoir comme ils veulent ?
b) si chaque femme soit entourée de deux hommes ?
c) si les femmes doivent s'asseoir ensemble ?
Réponse : a) $P_{12} = 12!$; b) $P_4 P_5 P_4 = 4!\,5!\,4!$; c) $P_9 P_4 = 9!4!$

21. De combien de façons on peut former groupes de k éléments contenant respectivement $r_1, r_2, \ldots, r_k$ éléments, en utilisant n éléments ($n = r_1 + r_2 + \ldots + r_k$) ?
Réponse : $\frac{n!}{r_1! r_2! \ldots r_k!}$

22. De combien façons peut-on aligner 5 crayons rouges, 2 blancs et 3 bleus, si les crayons de même couleur sont indiscernables ?
Réponse : 2520

23. Un comité, formé de 2 hommes et 2 femmes doit être constitué de 5 hommes et 7 femmes. Combien de possibilités différentes on a, si :
• chacune des 12 personnes est éligible ?
• une femme doit être membre du comité obligatoirement ?
• 2 hommes ne sont pas éligibles ?
Réponses : 210 ; 60 ; 63

24. Jeu de 32 cartes. Combien de mains différentes de 5 cartes peut avoir un joueur ?
Réponse : 201376

25. Combien de groupes de six personnes, peut-on former de 6 garçons et de 4 filles, si on doit inclure obligatoirement 2 filles,
• données ?
• seulement ?
• au moins ?
Réponses : 70 ; 90 ; 185

26. Développer $(P + Q)^{10}$

Chapitre 3

Probabilité

3.1 Synthèse Probabilité – I partie

- La **probabilité** P est toute **application** de l'ensemble des événements Ω dans l'intervalle $[0, 1]$, tel que :

$$\begin{aligned} P \quad : \quad & \mathscr{T}(\Omega) \to [0, 1] \\ & A \mapsto P(A) \end{aligned}$$

satisfaisant les propriétés (ou axiomes) suivantes

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathscr{T}(\Omega) \qquad & P(A) \geq 0 \\ P(\Omega) = 1 & \\ \forall A, B \in \mathscr{T}(\Omega) \qquad & \text{si } A \cap B - \emptyset \text{ alors } P(A \cup B) = P(A) + P(B). \end{aligned}$$

- **Définition classique :** Soit A un événement quelconque constitué de k **événements élémentaires** de Ω. Lors de l'hypothèse d'équiprobabilité on en déduit :

$$P(A) = \frac{k}{N} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombres de cas possibles}}.$$

- **Définition fréquentiste :** Soit p la probabilité d'apparition de l'événement A lors d'une expérience aléatoire. Si on répète l'expérience aléatoire N fois, **la fréquence** de l'apparition de l'événement A au cours des N expériences, $\frac{k}{N}$ tends vers p lorsque N tends vers l'infini. $N \to \infty \Rightarrow \frac{k}{N} \to p$.

- **Définition axiomatique :** Une application P de $\mathscr{T}$ dans l'intervalle $[0, 1]$, telle que :

  $P(\Omega) = 1$

  pour tous couples d'événements incompatibles deux à deux, est valable $\quad (\cup_i A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

est appelée probabilité sur $(\Omega, \mathscr{T})$.

- **Espace probabilisé :** Le triplet : $(\Omega, \mathscr{T}, P)$, où Ω est l' ensemble des "résultats possibles" de l'expérience aléatoire, $\mathscr{T}$ est l'ensemble "d'événements" et P est la "loi de probabilité" sur cet ensemble, forme l'espace probabilisée.

Exemple 1. : Jette d'une pièce de monnaie 4 fois de suite. Déterminer la probabilité d'obtenir la suite (F, P, P, F)

Solution : Définir Ω : Arrangement de 4 éléments parmi 2 avec répétitions $\bar{A}_2^4 = 2^4 = 16$. $1/2^4 = 1/16$. □

- **Propriétés des probabilités**

— **Additivité**

∘ **événements incompatibles**

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n$ n événements incompatibles deux à deux : $(A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j)$ alors :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_i \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_i) + \ldots + P(A_n)$$

La probabilité de la réunion d'un ensemble fini ou dénombrable d'événements 2 à 2 incompatibles est égale à la somme de leur probabilité d'où :

$$P(\cup_i A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

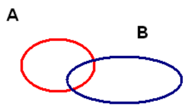
Exemple 2. : Jet d'une pièce de monnaie 4 fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois F et deux fois P ?

Solution : Définir Ω : Arrangement de 4 éléments parmi 2 avec répétitions $\bar{A}_2^4 = 2^4 = 16$. $A_1 = FFPP$, $A_2 = FPFP$, $A_3 = PFPF$, $A_4 = PPFF$, $A_5 = FPPF$, $A_6 = PFFP \Rightarrow$ nombre de cas favorables $6 \Rightarrow P(\cup_6 A_i) = 6/16 = 3/8$. □

∘ **Deux événements quelconques**

Soit A et B deux événements quelconques. Pour la probabilité de leur union, on a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



— **Événement contraire**

Soit A un événement quelconque, alors

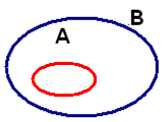
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

— **Événement impossible**

$$P(\emptyset) = 0$$

— **Inclusion**

Soit $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$.



— **Multiplicativité**

∘ Deux événements sont **indépendants** si l'on a :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Exemple 3. Quelle est la probabilité d'un jeu de 52 cartes de tirer
A : un pique. $P(A) = 13/52$.
B : un roi. $P(B) = 4/52$.
$P(A \cap B) = 1/52$ (probabilité d'avoir le roi de pique).
$P(A).P(B) = \frac{13}{52}\frac{4}{52} = \frac{52}{52^2} = \frac{1}{52}$. Et nous avons bien $P(A \cap B) = P(A).P(B) \Longleftrightarrow$ A et B sont indépendants □

∘ **Généralisation** à n événements

Les n événements ($n \geq 2$), A_1, A_2, …, A_i, …, A_n sont indépendants dans leur ensemble (ou mutuellement indépendants), ssi on a :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_i \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1 \times P(A_2) \times \ldots \times P(A_i) \times \ldots \times P(A_n)$$

$$P(\cap_i A_i) = \prod_{i=1}^{n} A_i$$

Test sur le chapitre : Probabilité - I partie

1. Combien d'interprétations de la notion de probabilité connaissez-vous ?
2. Donnez la définition classique de probabilité (énoncer l'hypothèse et démontrer la formule).
3. Donnez la définition fréquentiste de probabilité (énoncer l'hypothèse et démontrer la formule).
4. Énoncez la loi d'addition de probabilité pour les événements A et B compatibles $(A \cap B) = \emptyset$.
5. Énoncez la loi d'addition de probabilité des événements incompatibles A et B.
6. Déduire la probabilité de A en fonction des probabilités des deux événement $A \cap B$ et $A \cap \bar{B}$.

3.2 Problèmes : Probabilité - I partie

27. Jet d'un dé trois fois de suite. Quelle est la probabilité d'avoir les points :
    a) 1,4,5 dans l'ordre ?
    b) 1,6,6 dans l'ordre ?

c) 1,4,5 dans l'ordre ou dans le désordre ?
d) 1,6,6 dans l'ordre ou dans le désordre ?
e) 6,6,6 ?

28. Jet d'un dé non pipé deux fois de suite. Quelle est la somme des points obtenus aux deux jets, dont la probabilité est
    a) maximale ?
    b) minimale ?

29. Jet de deux dés discernables. Quelle est la probabilité des événements :
$A =$ "la somme des points obtenus est 6'
$B =$ "la somme des points obtenus est < 6"
$C' =$ "la somme des points obtenus est > 6".

30. Un dé est pipé de telle sorte que la probabilité d'apparaitre pour chacune des faces soit proportionnelle au point marqué sur la face. On lance le dé une fois. Calculer :
a) la probabilité de chaque épreuve.
b) la probabilité d'obtenir un point paire.
c) la probabilité d'obtenir un point impaire.

31. Jeu de "pile ou face". Quelle est la probabilité d'obtenir exactement trois fois face lors de quatre jets consécutives ?

32. Deux événements A et B sont de probabilité $P(A) = 0,7$ et $P(B) = 0,5$.
    a) Est-ce que les événements A et B sont incompatibles ?
    b) Calculer les probabilités $P(A \cap B)$ et $P(A \cap \bar{B})$, si $P(A \cup B) = 0,9$.

33. Jeu de 52 cartes. On tire 1 carte.
a) Quelle est la probabilité que cette carte soit un sept ?
b) Quelle est la probabilité que cette carte soit un sept sachant que c'est un carreau ?
c) Quelle est la probabilité que cette carte soit un sept sachant que ce n'est pas une image ?

34. Une main est composée de 4 cartes : l'as et la dame de carreau, l'as et la dame de trèfle. On la mélange. Quelle est las probabilité pour que la couleur des cartes alterne (rouge et noir) ?

35. Une urne contient 20 boules numérotées de 1 à 20
a) On tire une boule. Toutes les boules ont la même probabilité d'être extraites. Quelle est la probabilité pour que le nombre tiré :
a.1) soit impair
a.2) soit impair et divisible par 3 ?
b) On tire simultanément 2 boules. Toutes les paires de boules ont la même probabilité d'être extraites. Quelle est la probabilité pour que :
b.1) la somme des nombres tirés soit 12
b.2) le produit des nombres tirés soit 12.

36. On possède de 10 pièces de monnaie dont trois sont fausses. On en choisit deux par hasard. Quelle est la probabilité pour que
a) les deux pièces choisies soient bonnes ?
b) une seule soit fausse ?
c) les deux pièces soient fausses ?

Probabilité I partie. Indications et résultats

27. a) 1/216=0.0046296 ; b) 1/216=0.0046296 ; c) 6/216=0.027777 ; d) 3/216 = 0.0138888 ; e)=1/216=0.0046296 ;

28. a) $P(7) = 1/6$; b) $P(2) = P(12) = 1/36$;

29. $P(A) = 5/36$, $P(B) = 10/36$, $P(C) = 21/36$;

30. a) $P(1) = 1/21$, $P(2) = 2/21$, ..., $P(6) = 6/21$; b) 12/21 ; c) 9/21 ;

31. $\frac{1}{4}$;

32. a) $P(A \cap B) = 0 \to A$ et B compatibles ; b) $P(A \cap B) = 0.3$; $P(A \cap \bar{B}) = 0.4$;

33. a) $\frac{1}{13}$; b) $\frac{1}{13}$; c) $\frac{1}{10}$;

34. $\frac{1}{3}$;

35. a.1) 1/2 ; a.2) 3/20 ; b.1) 1/38 ; b.2) 3/190 ;

36. a) $\frac{21}{45}$; b) $\frac{7}{15}$; c) $\frac{1}{15}$.

3.3 Synthèse Probabilité – II partie

- **Probabilités conditionnelles**

Si A et B sont deux événements d'un espace probabilisé Ω avec $P(B) \neq 0$, on appelle **probabilité conditionnelle** de l'événement "A si B" ou "A sachant B", ou la probabilité de A étant donné que B est réalisé, le quotient

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

Exemple 4. Jet de deux dés discernables. On s'intéresse du chiffre sur la face supérieure de chaque dé. Quelle est la probabilité pour que sur l"un des dés on observe 2 points, sachant que la somme des points obtenus est 6.

Solution

Soit A = "l'un des dés donne 2" = {(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (1,2), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2)}.
B = "la somme des points vaut 6" = {(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)}.
D'ici $A \cap B = \{(2,4),(4,2)\}$ et d'après la loi de multiplication des événements quelconques

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/36}{5/36} = \frac{2}{5}.$$

- ◦ Si A et B sont deux événements indépendants et en plus $P(B) \neq 0$, alors

$$P(A/B) = P(A/\bar{B}) = P(A).$$

- **Formule des probabilités composées**

Soit A et B deux événements de l'espace probabilisé Ω. Alors,

$$P(A \cap B) = P(B/A)P(A) = P(A/B)P(B)$$

- **Théorème des probabilités totales**

Si $\{A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n\}$ est un **système complet d'événements** /c.-à-d. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est une partition de Ω, c.-à-d. $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$: $A_i \cap A_j = \emptyset$ $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$ et $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ $A_i \neq \emptyset (\Longrightarrow P(A_i) \neq 0)$/, quel que soit l'événement B, alors :

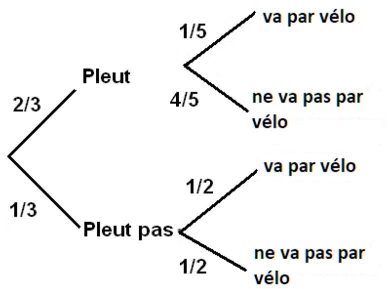
$$\begin{aligned} P(B) &= P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2) + \ldots + P(B/A_n)P(A_n) \\ P(B) &= \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i) \end{aligned}$$

Exemple 5. Pierre va à l'Université demain par son vélo avec une probabilité de 1/5 s'il pleut et de 1/2 s'il ne pleut pas. La probabilité qu'il pleuve demain est de 2/3. Quelle est la probabilité que Pierre va à l'Université demain par son vélo ?

Solution

Soit A_1 = "il pleut demain" ; A_2 =' 'il ne pleut pas demain" ; B = "Pierre va par vélo".
$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) = 2/3.1/5 + 1/3.1/2 = 3/10.$

La situation schématisé par
un diagramme en arbre
$P(B) = 2/3.1/5 + 1/3.1/2 = 3/10.$



- **Formule de Bayes**

Si $\{A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n\}$ est un système complet d'événements, et quel que soit l'événement B tel que $P(B) \neq 0$, alors :

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{P(B/A_1)P(A_1) + \ldots + P(B/A_i)P(A_i) + \ldots + P(B/A_n)P(A_n)}$$

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B/A_j)P(A_j)}$$

La formule de Bayes donne la probabilité de la cause : B étant réalisé, l'événement A_i en soit la cause.

Test sur le chapitre : Probabilité - II partie

7. Quand dit-on que deux événements sont indépendants ?
   Que vaut $P(A|B)$ lorsque A et B sont indépendants ? :
   $P(A|B) = P(A)$; $P(B|A) = P(B)$.

8. Énoncez la loi de multiplication de probabilité pour les événements A et B indépendants.

9. Énoncez la loi de multiplication de probabilité pour les événements A et B dépendants.

3.4 Problèmes : Probabilité – II partie

37. Lors d'un examen, 15% des étudiants échouent en informatique , 25% échouent en mathématiques et 10% échouent à la fois en mathématiques et en informatique.

    a) Est-ce que les deux événements M = "échouer en mathématiques" et I = "échouer en informatique" sont statistiquement indépendants ? Justifier.
    b) Calculer la probabilité conditionnelle d'échouer en informatique sachant que l'étudiant a échoué en mathématiques.
    c) Calculer la probabilité qu'un étudiant tiré au sort ait échoué au moins en une des deux matières.
    d) En déduire la probabilité qu'un étudiant tiré au sort n'ait échoué en aucune des deux matières.
    e) Quelle est la probabilité qu'un étudiant n'ait échoué qu'en une seule des deux matières ?

38. Le propriétaire d'un magasin d'articles ménagers a reçu une cargaison d'articles de cristal dont 5% ont des emballages abîmés. Le propriétaire estime que :

    - 60% des boîtes endommagées contiennent au moins un article abîmé.
    - 98% des boîtes non endommagées ne contiennent aucun article abîmé.

    Soit les événement D = "la boîte contient au moins un article abîmé" et A = "la boîte est endommagée.
    a) Donner les probabilités de $P(A)$, $P(\bar{A})$, $P(D/A)$, $P(D/\bar{A})$, $P(\bar{D}/A)$ et $P(\bar{D}/\bar{A})$.

b) Le client constate qu'un des articles acheté est abîmé. Quelle est la probabilité pour qu'il ait acheté une boîte endommagée.

39. Tirage successif sans remise d'une urne contenant 4 boules rouges et 3 boules noires. On effectue 3 tirages. Quelle est la probabilité pour que
a) la première boule tirée soit noire, la seconde rouge et la troisième noire ?
b) la première et la seconde boules tirées soient rouges et la troisième noire ?

40. A chaque question d'un questionnaire à choix multiples, m réponses sont proposées. Soit p la probabilité qu'un étudiant sait la bonne réponse à une question donnée. Si l'étudiant ne sait pas la bonne réponse, il choisit au hasard l'une des m réponses proposées. Un étudiant a donné la bonne réponse. Quelle est la probabilité qu'il la connait vraiment ?

41. Dans un lot de 100 dés, 25 dés sont pipés : La probabilité d'apparition d'un six pour un dùe pipùe est de 1/2. On jette un dé, choisit au hasard, et on obtient un 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

42. La production journalière d'une compagnie se caractérise par 5 % d'articles défectueux. En plus, la probabilité qu'un bon article soit accepté par le contrôle de fabrication est de 96 %, tant que la probabilité qu'un article défectueux soit refusé par le contrôle est de 98 %.
a). Quelle est la probabilité le contrôle d'un article choisi au hasard, d'être faux ?
b). Quelle est la probabilité qu'un article accepté soit défectueux ?

43. Les clients d'une compagnie d'assurance sont répartis en trois classes : les bons risques $/R_1/$, les risques moyens $/R_2/$ et les mauvais risques $/R_3/$, dont les effectifs sont, respectivement de 20% , 50% et 30% de la population totale.
La probabilité d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont de 0.05 pour R_1, 0.15 pour R_2 et 0.30 pou R_3.
a). Quelle est la probabilité un client de la compagnie, choisi au hasard, d'avoir un accident dans l'année ?
b). Si un client de la compagnie, choisi au hasard n'a pas eu d'accident cette année, quelle est la probabilité qu'il appartient à la classe de bon risque ?

44. Jeu de 32 cartes. On tire huit cartes. Soit l'événement $A =$ "la main de huit cartes comprend exactement 3 carreaux" et l'événement $B =$ "la main de huit cartes comprend exactement 3 trèfles". Les deux événements A et B sont-ils indépendants ?

45. On jette deux dés simultanément. Quelle est la probabilité que sur l'un des dès les points soit 6 sachant que la somme des points des deux dès est 9.

46. Des élèves d'une classe, 40% ont des cheveux bruns, 25% ont les yeux marrons et 15% ont à la fois les cheveux bruns et les yeux marrons.
Si un élève de cette classe, choisi par hasard, a des cheveux bruns, quelle est la probabilité qu'il ait les yeux marrons ?

47. On tire successivement et au hasard quatre lettres du mot FORMIDABLES. Quelle est la probabilité, pour que dans l'ordre du tirage, ces lettres forment le mot DORE ?
a) si le tirage effectué est avec remise.
b) si le tirage est sans remise.

découpage

Probabilité II partie. Indications et résultats

37. a). M et C sont dépendants ; b) $P(C|M) = 0.4$; c) $P(M \cup C) = 0.3$; d) $P(\overline{M \cup C}) = 0.7$; e) $P(M \cap \overline{C} \cup \overline{M} \cap C) = 0.2$

38. a) $P(A) = 0,05$, $P(\bar{A}) = 0,95$, $P(D/A) = 0,6$ $P(\bar{D}/\bar{A}) = 0,98$, $P(\bar{D}/A) = 0,4$, $P(D/\bar{A}) = 0,02$, $P(D) = \frac{49}{1000}$; b). $\frac{30}{49}$;

39. a) $\frac{4}{35}$; b) $\frac{6}{35}$;

40. $\frac{mp}{1+(m-1)p}$;

41. $\frac{1}{2}$;

42. a) 0,04 ; b) $\frac{1}{913} \approx 0,001$;

43. a) 0,175 ; b) 0,23 ;

44. événements dépendants ;

45. $\frac{1}{2}$;

46. $\frac{3}{8}$;

47. a) $1/14641$; b) $\frac{1}{7920}$.

Chapitre 4

Modèles d'urne

4.1 Synthèse

- **Modes de tirage :**

  - **successif avec remise** (suite ordonné avec répétition)
    On peut tirer les boules l'une après l'autre, en remettant chaque fois la boule tirée avant de procéder au tirage suivant.

  - **successif sans remise** (suite ordonné sans répétition)
    On peut tirer les boules l'une après l'autre, sans qu'une boule tirée soit remise dans l'urne.

  - **simultanément** (suite non ordonné sans répétition)
    On peut tirer les boules *simultanément*, c'est-à-dire d'un seul coup. De point de vue probabiliste cette méthode de tirage est identique à celle du tirage sans remise.

  - **exhaustif**
    On tire toutes les boules dans l'urne successivement ou simultanément (on vide l'urne).

  - **non exhaustif**
    On tire p boules de l'urne, comportant n boules et $p < n$. On ne vide pas l'urne.

<table>
<tr><th>Types de tirages</th><th>Ordre</th><th>Répétitions d'éléments</th><th>Dénombrement</th></tr>
<tr><td>Successifs avec remise</td><td rowspan="2">Dispositions ordonnées</td><td>Un élément peut être tiré plusieurs fois</td><td>$\bar{A}_n^p$ arrangements avec répétition n^p</td></tr>
<tr><td>Successifs sans remise</td><td rowspan="2">Un élément n'est tiré qu'une seule fois</td><td>A_n^p arrangements $\frac{n!}{(n-p)!}$</td></tr>
<tr><td>Simultanés</td><td>Dispositions non ordonnées</td><td>C_n^p combinatoires $\frac{n!}{p!(n-p)!}$</td></tr>
</table>

4.1.1 Probabilité d'obtention d'un nombre donné de boules

Urne contenant deux sortes de boules

Tirage de n boules avec remise - succession de n expériences partielles, identiques et indépendantes l'une de l'autre :

$$F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap \bar{F}_{k+1} \cap \ldots \cap \bar{F}_n.$$

Soit $E_k =$ "prélever k boules du type A parmi les n boules tirés dans les différents cas".

$$P(E_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^k,$$

où $p = N_1/N$ est la probabilité qu'une boule tirée soit de type A ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$).

Tirage de n boules sans remise - n expériences partielles non identiques et non indépendantes l'une de l'autre.
Théorème de multiplication : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ - A, B - événements indépendants ; $P(A \cap B) = P(A).P(B|A) = P(B).P(A|B)$ - événements dépendants/

$$P(E_k) = \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

où $\max(0, n - N + N_1) \leq k \leq \min(N_1, n)$.

Tirage de n boules simultané - événements non équiprobables. Probabilité même que celle de tirage sans remise.

Urne contenant N boules de k couleurs différentes

Considérons une urne $\mathscr{U}$ contenant N boules de k couleurs différentes. Supposons les couleurs numérotées de 1 à k. Pour chaque couleur i de $[1, k]$, on note N_i le nombre de boules de la couleur i. Pour tout entier i compris entre 1 et k désignons par $p_i = \frac{N_i}{N}$ la proportion de boules de la couleur i dans l'urne. On a la relation $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.
Intéressons nous à la répartition des couleurs dans le tirage obtenu, c'est-à-dire au nombre de boules obtenues dans chaque couleur.
Soient $n_1, n_2, \ldots, n_k$ des entiers naturels tels que $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Considérons l'ensemble $A(n_1, \ldots, n_k)$ des tirages contenant exactement n_1 boules de la couleur 1, n_2 boules de la couleur 2,..., et n_k boules de la couleur k. Pour chacun des modes de tirage précédents, nous allons déterminer la probabilité de cet événement $A(n_1, \ldots, n_k)$.

Tirage avec remise : Dans le cas d'un tirage avec remise de n boules de l'urne $\mathscr{U}$ précédente on a :

$$P(A(n_1, \ldots, n_k)) = \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!} \cdot p_1^{n_1} \ldots p_n^{n_k}$$

Tirage sans remise : Dans le cas d'un tirage sans remise de n boules de l'urne $\mathscr{U}$ précédente on a :

$$P(A(n_1,\ldots,n_k)) = \frac{C_{N_1}^{n_1}\,.\,C_{N_2}^{n_2}\,.\,\ldots C_{N_k}^{n_k}}{C_N^n}$$

Tirage simultané : Dans le cas d'un tirage simultané de n boules de l'urne $\mathscr{U}$ précédente on a :

$$P(A(n_1,\ldots,n_k)) = \frac{C_{N_1}^{n_1}\,.\,C_{N_2}^{n_2}\ldots C_{N_k}^{n_k}}{C_N^n}.$$

4.1.2 Schéma (processus) de Bernoulli

Soit une expérience aléatoire ayant exactement 2 issues possibles, c.à.d. donnant lieu à 2 événements complémentaires S (succès) et $\bar{S}$ (échec) avec les probabilités $P(S) = p$ et $P(\bar{S}) = 1 - p = q$. Répétons n fois cette expérience. On a un schéma (ou processus) de Bernoulli si les conditions suivantes sont satisfaites :

- les expériences successives sont indépendantes les unes des autres
- la probabilité d'obtenir S reste égale à p lors de chaque répétition.

On peut s'intéresser au nombre de fois que S s'est réalisé au cours des n expériences.

$$P(S \text{ se réalise } k \text{ fois}) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Un tel schéma est décrit par un modèle d'urne et des tirages avec remise.

Test sur le chapitre : Modèles d'urne

1. Combien de modes de tirage connaissez vous ? Énumérer les.
2. Décrivez le tirage avec remise
3. Décrivez le tirage sans remise
4. Décrivez le tirage simultané. De point de vue probabiliste cette méthode de tirage est identique à celle du tirage

   a. sans remise **b.** avec remise

5. Donnez le nombre des résultats possibles dans le cas de tirages successifs de n objets parmi n objets avec remise.
6. Donnez le nombre des résultats possibles dans le cas de tirages successifs de p objets parmi n objets avec remise.

7. Donnez le nombre des résultats possibles dans le cas de tirages successifs de p éléments parmi n sans remise.

8. Donnez le nombre des résultats possibles dans le cas de tirages successifs de n éléments parmi n sans remise.

9. Donnez le nombre des résultats possibles dans le cas de tirage simultané de p éléments parmi n.

4.2 Problèmes

48. On considère trois urnes. La première contient 3 boules rouges et 1 bleu. La deuxième 2 rouges et 3 bleus. Et la troisième 3 rouges et 4 bleus.
a) On tire une boule de l'une des trois urnes. Quelle est la probabilité que la boule soit rouge ?
b) Si on remet la première boule tirée dans l'urne et on tire une boule de nouveau. Quelle est la probabilité que la boule tirée aux deuxième tirage soit rouge ?
c) Est-ce que les deux événements R_1 = "boule rouge au I tirage" et R_2 = "boule rouge au II tirage" sont indépendants ?
d) Si la première boule tirée est rouge, quelle est la probabilité qu'elle a été tirée de la deuxième urne ?

49. Une urne contient 3 boules blanches et 5 boules noires. On tire au hasard, successivement et sans remise deux boules de l'urne. Quelle est la probabilité que les deux boules tirées soient de la même couleur ?

50. Un test de classement en ligne pour évaluer les niveaux de compétence est constitué de 6 questions en choisissant par hasard 2 questions de 3 groupes de questions, contenant 10, 15 et 20 questions. L'interrogé ne connaît les bonne réponses que de 3 questions de chaque groupe. Quelle est la probabilité :
a) Que le test est composé de 6 questions que l'interrogé connaît ?
b) Que le test est composé d'au moins une question que l'interrogé connaît ?

51. Dans une classe il y a 30 élèves, dont 5 étudient l'allemand, 10 étudient l'anglais et 15 étudient l'espagnol. On compose un groupe de 4 élèves de cette classe. Quelle est la probabilité
a) d'avoir choisit 4 élèves qui étudient l'espagnol.
b) qu'au moins un des élèves choisis dans ce groupe soit une fille sachant qu'il y a respectivement 2, 4 et 5 filles dans chaque groupe.

52. L'urne U1 contient 5 boules rouges et 3 boules noires.
Une autre urne U2 contient 2 boules rouges et 6 boules noires.
a) On effectue tirage d'une boule de chaque urne. Quelle est la probabilité les deux boules tirées d'être de la même couleur ?
b) On effectue tirage de deux boule de chaque urne. Quelle est la probabilité toutes les quatre boules tirées d'être de la même couleur ?

53. Une urne est composée de 7 boules blanches, 5 rouges et 3 noires. On effectue un tirage simultané de 3 boules de l'urne. Quelle est la probabilité :
a) les 3 boules tirées d'être de couleurs différentes ?
b) parmi les 3 boules tirées d'avoir au moins 2 rouges ?
c) parmi les 3 boules tirées d'avoir au moins une boule blanche ?

54. Une urne contient 2 boules blanches, une boule noire, 7 boules rouges. On extrait successivement deux boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'avoir une boule blanche puis une boule noire.
a) en remettant la boule tirée dans l'urne après le premier tirage ?
b) sans la remettre ?

55. Une sac contient 2 boules bleues, 3 boules rouges et 1 boule noires. On effectue un tirage simultané de 2 boules du sac. Quelle est la probabilité que lors de ce tirage on obtient une boule bleue et une boule noire, sachant que les boules tirées sont de couleurs différentes ?

56. Une urne U1 contient 2 boules blanches, 1 boule noire et 1 boule rouge. Une autre urne U2 contient 2 boules rouges et 1 boule noire. On prend au hasard une boule de l'urne U1 et on la place dans la seconde urne U2. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge de la seconde urne ?

Modèles d'urne. Indications et résultats

48. a) $221/420 \approx 0.52$; b) 0.547 ; c) B_1 et B_2 dépendants ; d) 0.25

49. 13/28 ;

50. a)3/99750 ; ,) 0,79003 ;

51. a)0,05 ; b) 0,86 ;

52. a)0,4375 ; b) 0.070'

53. a) 3/13 ; b) $\frac{22}{91}$; c) $\frac{57}{65}$;

54. a) 0,02 ; b) $\frac{2}{90} = 0.0222\ldots$;

55. $\frac{2}{11}$;

56. $\frac{9}{16}$.

Chapitre 5

Variable aléatoire et distribution de probabilité. Variable aléatoire discrète

5.1 Synthèse

• **Variable aléatoire :** Soit $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ l'espace probabilisé d'espace fondamental Ω et de mesure de probabilité P et lié à une expérience aléatoire. On appelle **variable aléatoire réelle** (v.a.) sur cet espace, toute application X de son ensemble fondamental Ω dans $\mathbb{R}$, tel que : $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ \ \omega \longrightarrow x,$ avec $x = X(\omega)$, c.-à-d. une application qui à chaque élément de Ω (à chaque résultat d'une expérience aléatoire) associe une donnée numérique réelle (voir la Fig.1). On dit que x est la valeur prise par la v.a. X lorsque le résultat de l'expérience aléatoire est ω.

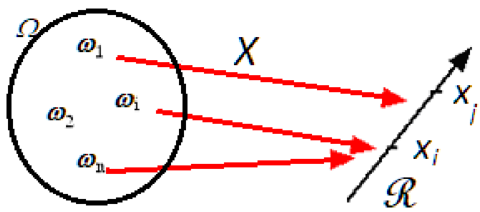


Fig. 1 Variable aléatoire

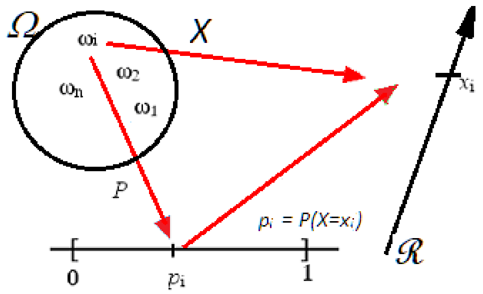


Fig.2 Distribution de probabilité

A chaque événement élémentaire ω de Ω correspond un nombre réel x associé à la variable aléatoire X.

• **Variable aléatoire discrète :** v. a. dont les différentes valeurs possibles sont en nombre fini ou infini dénombrable - en règle générale, toutes les variables qui résultent d'un dénombrement ou d'une numération.

• **Loi ou distribution de probabilité** d'une v.a. discrète X est la fonction définie par l'ensemble des couples $\{(x, p_x) : x \in V\}$ (voir la Fig.2).

• **Représentation graphique** de la loi de probabilité d'une v.a. discrète - par un **diagramme en bâtons**.

• **Fonction de répartition** : associe à une valeur réelle quelconque x la probabilité pour que la v.a. X prenne une valeur inférieure à x. Notée : $F(x) = P(X < x)$.

• **Propriétés de la fonction de répartition** Soit $F(x) = P\{X < x\}$ la fonction de répartition d'une la variable aléatoire discrète X, alors :

a). $\forall x \in \mathbb{R}\ 0 \leq F(x) \leq 1$

b). $F(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
c). $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$
d). si $a \leq b$ $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$.
Lorsque l'ensemble des valeurs possibles, ou ensemble de définition de la variable aléatoire X est fini : $\{x_1, x_2, \ldots, x_n,\}$, $F(x)$ est nulle sur l'intervalle $]-\infty, x_1[$ et égale à 1 sur l'intervalle $[x_n, +\infty[$.

- **Représentation graphique** de la fonction de répartition - la **courbe cumulative (courbe de répartition)**. Dans le cas d'une variable discrète, on l'appelle encore **courbe en escalier** à cause de sa forme : elle présente des marches (ou sauts) aux points d'abscisse x_i correspondant aux valeurs possibles de la variable.

- **Calcule de la fonction de répartition** à partir des probabilités attachées aux valeurs possibles de la variable discrète :$F(x) = \sum_{x_i<x} P\{X = x_i\}$.

- **Reconstruction de la distribution de probabilité à partir de la fonction de répartition :** $P\{X = x_i\} = F(x_{i+1}) - F(x_i)$.

- **Paramètres d'une variable aléatoire discrète**

A. Paramètre de position

- **Mode** x_m de la variable aléatoire X, ou de la distribution de X est la valeur x_m, pour laquelle $P(X = x)$ présente un maximum. (la valeur de X la plus probable)

- **Espérance mathématique ou "moyenne probabiliste"** $E(X) = \mu(X) = \mu$ d'une v. a. discrète X de loi de probabilité $(x_i, p_i), i = \overline{1, n}$ est $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

- **Propriétés de l'espérance mathématique**

Si a et b sont des nombres réels (des constantes) et X, Y des variables aléatoires : $E(a) = a$; $E(aX) = aE(X)$; $E(aX \pm b) = aE(X) \pm b$; $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$; $E(XY) = E(X)E(Y)$, si X, Y sont indépendantes.

- **Moments d'ordre** k : m_k de la v.a. X est $m_k = E(X^k) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i$.

B. Paramètres de dispersion

— **Variance** $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2 = E((X - E(X))^2)$
— **Ecart-type** $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{Var(X)}$.
L'écart-type indique dans quelle mesure les valeurs prises par la variable aléatoire ont tendance à être plus ou moins dispersées autour de l'espérance mathématique.
En gestion, il nous renseignera sur le degré de risque lié à certaines décisions prises à partir des différentes valeurs de la variable. Plus l'écart-type sera élevé, plus le risque sera grand.

- **Calcul de** $Var(X)$ **:** $Var(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$.

- **Propriétés de la variance**

Si a est un nombre réel (une constante) et X une variable aléatoire : $Var(a) = 0$; $Var(aX) = a^2 Var(X)$; $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) - 2E((X - E(X)(Y - E(Y))$; $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y)$, si X et Y sont indépendantes.

- **Coefficient de variation** (en général pour des variables positives seulement) est le rapport de l'écart type à la moyenne : $CV = \frac{\sigma}{\mu} \times 100\%$. Mesure la dispersion relative d'une distribution et donne l'homogénéité de la distribution.

Si $CV < 15\%$ - la distribution est peu dispersée et peut être considérée comme homogène. Si $CV > 15\%$ - la distribution est hétérogène, dispersée.

- **Moments centrés d'ordre** k : μ_k d'une variable aléatoire X est la moyenne $\sum p_i(x_i - E(X))^k$ des k^e puissances de leurs valeurs centrées $x_i - E(X)$: $\mu_k = E(X - E(X))^k$.

C. Couples de variables aléatoires.

- **Covariance** de deux variables aléatoires X et Y, définies sur le même univers Ω, est le réel $cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
- **Propriétés de la covariance :** Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω, alors : $\forall(a, b) \in \mathbb{R}$ $V(aX + bY) = a^2V(X) + 2ab\,cov(X, Y) + b^2V(Y)$, $(cov(X, Y))^2 \leq V(X)\,V(Y)$, $|cov(X, Y)| \leq \sigma(X)\,\sigma(Y)$, $-1 \leq cov(X, Y) \leq 1$.
- **Coefficient de corrélation** est le réel $R(X, Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.

D. Opérations sur les variables aléatoires

- **Variable centrée** est une v. a. réelle d'espérance mathématique nulle.

Chaque variable aléatoire réelle discrète X d'espérance mathématique $E(X)$, peut être transformée en variable aléatoire réelle discrète centrée par la transformation $\boldsymbol{Y = X - E(X)}$. La moyenne de Y est nulle.

- **Variable réduite** - v. a. de variance 1. Chaque variable aléatoire réelle discrète X de variance $Var(X) = (\sigma(X))^2 \neq 0$ peut *etre transformée en variable aléatoire réelle discrète réduite $\mathbf{Y} = \mathbf{X}/\sigma(\mathbf{X})$.
- **Variable aléatoire centrée réduite** - une variable aléatoire réelle d'espérance nulle et de variance unité. Chaque v.a. discrète X d'espérance mathématique $E(X)$ et de variance $Var(X) = (\sigma(X))^2$ peut être transformée en v. a. réelle discrète centrée et réduite $\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{X}-\mathbf{E}(\mathbf{X})}{\sigma(\mathbf{X})}$.

D. Fonction caractéristique et fonction génératrice

- **Fonction caractéristique de** X de loi $\{x_i, p_i\}$ est la fonction $\Phi_X(t) = \sum_i p_i e^{itx_i}$. C'est simplement la transformée de Fourier de la loi.
- **Fonction génératrice de la v.a.** X de loi $\{x_i, p_i\}$ (recommandée lorsque $x_i \in \mathbb{Z}$) est $G_X(z) = \sum_i p_i z^{x_i}$.
- **Utilisation de** $G_X(z)$ **(**$x_i \in \mathbb{Z}$**) et** $\Phi_X(t)$ **(**$x_i \notin \mathbb{Z}$**)** X - v.a., $x_i \in \mathbb{Z}$. Obtention de :

loi de X : par développement de la fonction génératrice $G_X(z)$ en série entière, ou en série de Laurent s'il y a des valeurs négatives

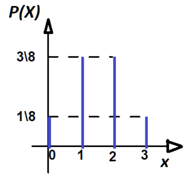
moyenne μ_X : Soit $G'_X(1)$ la dérivée de $G_X(z)$ au point $z = 1$: $E(X) = G'_X(z)\,|_{z=1}$.

variance σ^2_X : Soit $G''_X(1)$ la dérivée seconde de $G_X(z)$ au point $z = 1$: $Var(X) = G''_X(z)\,|_{z=1} + G'_X(z)\,|_{z=1} - \left(G'_X(z)\,|_{z=1}\right)^2$.

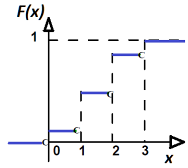
Test sur le chapitre : Variable aléatoire discrète

1. Qu'est-ce que la variable aléatoire ?
2. Donnez la définition de v.a. discrète
3. Décrivez la loi de probabilité de la variable aléatoire discrète ?
4. La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète peut être représenté graphiquement par

un diagramme en ….
5. Décrivez la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète ?
6. La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète se visualise par un diagramme en ….
7. La figure ci-dessous est un diagramme en bâtons / une fonction en escalier et visualise la distribution de probabilité / la loi de probabilité / la fonction de répartition. /souligner les notions correctes/



8. La figure ci-dessous est un diagramme en bâtons / une fonction en escalier et visualise la distribution de probabilité / la loi de probabilité / la fonction de répartition. /souligner les notions correctes/



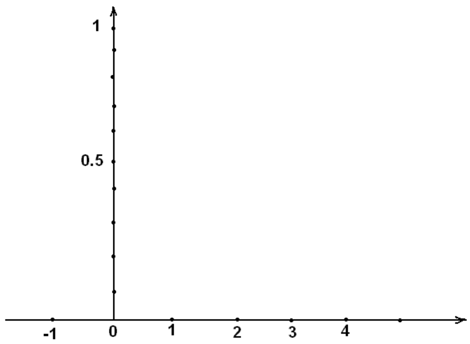
9. Décrivez les paramètres d'une loi de probabilité discrète
10. Quand dit-on qu'une variable aléatoire discrète est centrée ?
11. Donnez la définition de la variable aléatoire discrète réduite.

5.2 Problèmes

57. Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules blanches. On tire simultanément 2 boules de l'urne et on note la couleur des boules tirées.
a) Déterminer le système complet d'événements et la probabilité de chacun d'eux.
Supposons que c'est un jeu et que chaque boule rouge tirée rapporte 1 €. Notons X la somme gagnée.
b) Déterminer les valeurs possibles pour X.
c) Compléter le tableau :

X			
P(X=x)			

Ce tableau représente la loi de probabilité (ou fonction de distribution) de la variable aléatoire X.
d) Donner la représentation graphique de la fonction de distribution de X.



e) Trouver la fonction de répartition et donner sa représentation graphique.
f) Combien peut-on espérer gagner en moyenne ?

58. M. Martin a dans sa poche 5 pièces de 1 € et 3 pièces de 2 €. Il tire au hasard et

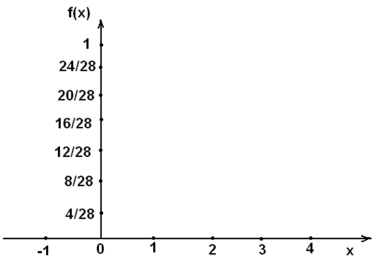
simultanément 2 pièces de sa poche. M. Martin a besoin de 3 € au moins pour payer le stationnement de son véhicule.
a) Quelle est la probabilité que M. Martin puisse payer le stationnement avec les 2 pièces qu'il a tirées ?
b) Quelle somme peut-il espérer tirer en moyenne ?
Appelons X la v.a. qui donne la "somme tirée". Valeurs possibles de X :
c) Compléter dans le tableau la fonction de distribution - loi de probabilité $f(x)$

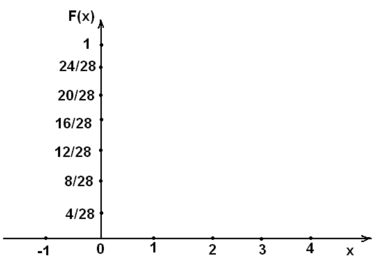
x			
$f(x) = P(X = x)$			

d) Comment traduire l'événement "M. Martin peut payer le stationnement avec les deux pièces qu'il a tirées" à l'aide de la v.a. X ?
e) Compléter le tableau avec la fonction de répartition $F(X)$

x			
$F(X) = P(X < x)$			

f) Donner la représentation graphique des fonctions f et F





59. Soit X une v.a. dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x	-1	0	3	5	
$P(X = x)$	0,1	0,3	0,4	0,2	
$P(X < x)$					

a) Compléter le tableau et donner la représentation graphique de la loi de probabilité de X et de sa fonction de répartition.
b) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X
c) Ecrire la fonction génératrice $G_X(z)$
d) Calculer l'espérance mathématique et la variance à partir de la fonction génératrice
e) Trouver le moment d'ordre 2
f) Trouver le moment centré d'ordre 2
g) Pouvez vous commenter la homogénéité de la distribution ?
h) Trouver la v.a. centrée Y de X
i) Trouver la variable aléatoire réduite W de X
j) Trouver la variable aléatoire centrée réduite Z de X

60. Lance d'un dé à 6 faces bien équilibré. On considère deux jeux :
a) Si la face du dé est "1" ou "6", le joueur gagne 12 points, sinon il perd 6 points.
b) Si la face du dé montre 6, le joueur gagne 120 points, sinon, il perd 25 points.
Quel jeu est plus intéressant et selon quel critère ?
/Aide : imaginer que le jeu se répète un grand nombre de fois. /

61. Lance d'un dé bien équilibré. On considère trois jeux :
    a) Lance d'un dé à 6 faces bien équilibré. Si la face du dé montre "6", le joueur reçoit 20 €; si ce n'est pas un 6, il doit payer 1 €.
    b) Lance d'un dé à 6 faces bien équilibré. Si on obtient 1 ou 6, le joueur reçoit 30 €, sinon il doit payer 10 €.
    c) Tirage d'une boule dans une urne contenant 100 boules, dont une rouge et 99 bleues. Si la boule tirée soit la rouge, le joueur reçoit 1 000 000 €, sinon il doit payer 1 000 €.
    Lequel des trois jeux est le plus intéressant pour un joueur et selon quels critères ?

62. Jeu de 52 cartes. On en extrait 4 cartes.
    a) Soit la variable aléatoire X = "nombre de cartes de cœur ainsi extraites". Quelle est la loi de probabilité de X ? Calculer sa moyenne et son écart-type.
    b) Soit la variable aléatoire Y = "nombre d'as". Quelle est la distribution de probabilité de Y ? Calculer sa moyenne et son écart-type.

Exemple 5.3.1.1 Deux v.a. indépendantes ont les distributions de probabilités

X	1	2
P	0.4	0.6

Y	0	1	2
P'	0.2	0.3	0.5

Trouver la distribution, l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire
a) $X + Y$
b) $X - Y$
c) $X + X$
d) $2X$
e) XY
f) Calculer la covariance de X et Y
g) Analyser la homogénéité des deux distributions X et Y.

Chapitre 6

Lois de probabilité discrètes particulières

6.1 Synthèse

A. Lois usuelles finies

6.1.1 Distribution uniforme (discrète) $X \sim \mathcal{U}(n)$

Définition : Une distribution de probabilité suit une loi uniforme lorsque l'ensemble des observables de la valeur aléatoire contient un nombre fini de valeurs réelles : $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et toutes les valeurs prises par la variable aléatoire sont équiprobables :

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n}, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Une distribution uniforme ne présente, évidemment, pas de mode.

- **Paramètres descriptifs :**

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i;\ E(X^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2;\ \sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2.$$

- **Cas fréquent :** $X(\Omega) = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

— **Fonction de distribution :** $(k, 1/n)$; $p_k = P(X = k) = 1/n$, $k = 1, \ldots, n$

— **Fonction de répartition :** $F(x) = k/n$, $(k \leq x < k + 1)$

— **Paramètres :** $\mu = \frac{(n+1)}{2}$; $\sigma^2 = \frac{n^2-1}{12}$.

6.1.2 Distribution de Bernoulli $X \sim \mathcal{B}(1, p)$ ou $\mathcal{B}(p)$

Soit une expérience aléatoire ayant exactement 2 issues possibles, c.à.d. donnant lieu à 2 événements complémentaires S (succés) et $\bar{S}$ (échec) avec les probabilités $P(S) = p$ et $P(\bar{S}) = 1 - p = q$.

Définition : On appelle **variable indicatrice** ou **variable de Bernoulli** de l'événement S la variable aléatoire X qui associe à S la valeur 1 et à $\bar{S}$ la valeur 0 : $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\Omega) = \{0, 1\}$.

Définition : La loi de probabilité associée à la variable de Bernoulli X telle que : $\{(0, q), (1, p)\}$, c.à d. $P(X = 0) = q$, $P(X = 1) = p$, avec $p + q = 1$ est applée **loi de Bernoulli** notée $\mathcal{B}[1, p]$

- **Notation :** $X \sim \mathcal{B}(1, p)$ ou $\mathcal{B}(p)$
- **Fonction de répartition :** $F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ q & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- **Paramètres descriptifs :** $\mu = p$; $\sigma^2 = pq$. Le mode est 1 si $p > \frac{1}{2}$, et 0 si $p < \frac{1}{2}$. Il n'y a pas de mode si $p = \frac{1}{2}$. Si $p = \frac{1}{2}$, on obtient la loi uniforme sur $[0, 1]$ puisque alors $P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$.

Exemples typiques : Tirage d'une boule dans une urne ne contenant que deux sortes de boules ; la réponse à une question d'un vrai ou faux ; le lancer d'une pièce de monnaie ;...

6.1.3 Distribution binomiale $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

La loi binomiale correspond au tirage d'un échantillon avec remise dans une population comportant deux catégories d'individus.

Définition : On dit qu'une v.a. X à valeurs dans $\mathbb{N}$, suit une loi binomiale si sa loi de probabilité est donnée par :

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

avec $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, où n est entier donné /nombre de tirages successifs ou d'épreuves indépendantes/ et où p /la probabilité de la réalisation de l'événement/ est un réel tel que $0 < p < 1$.

- **Notation :** $X \sim \mathcal{B}(n, p)$
- **Fonction de répartition :** $F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \sum_{i=0}^{k} C_n^i p^i q^{n-i} & k < x \leq k+1 \\ 1 & x > n \end{cases}$,

$/BINOMDIST(k; n; p; 1)/$

- **Paramètres :** $\mu = np$, $\sigma^2 = npq$, $\sigma = \sqrt{npq}$.

• **Forme :** La distribution binomiale est de type unimodal **symétrique** quand $p = q = 0,5$ et quand le nombre d'observations est grand, à condition que p ne soit pas trop voisin de 0 ou de 1. Sinon, elle est **dissymétrique,** la dissymétrie étant d'autant plus grande que p est plus différent de q.
La loi binômiale rend compte de tous les phénomènes, répétés n fois de façon indépendante, pouvant prendre deux états (et deux seulement) : succès ou échec, oui ou non, état 0 ou état 1,...
La loi "théorique" la plus fréquente. Utilisation pratique souvent limitée : on ne peut obtenir un résultat "rapide" que dans certains cas. Dans des conditions, la loi binômiale peut être approchée par les lois de Poisson ou de Gauss, d'un usage plus commode.

• **Stabilité :** Si S_n et S_m sont deux variables **indépendantes** suivant des lois binomiales respectivement $S_n \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $S_m \sim \mathcal{B}(m,p)$ alors $S_n + S_m \sim \mathcal{B}(n+m,p)$.

6.1.4 Distribution hypergéométrique $X \sim \mathcal{H}(N,n,p)$

La loi hypergéométrique correspond au tirage d'un échantillon sans remise. Dans ce cas p et q ne restent pas constants.

Définition : Soit une urne, composée de N éléments, dont N_p éléments sont d'un certain type. On effectue un tirage sans remise de n éléments. La loi hypergéométrique donne la probabilité que k éléments parmi les n tirés soient du type N_p. La loi de probabilité est donnée par : $P(X=k) = \frac{C_{N_p}^k C_{N_q}^{n-k}}{C_N^n}, k \in \{0,\ldots,\min(n,N_p)\}$.

• **Notation :** $X \sim \mathscr{H}(N,n,p)$

• **Paramètres :** $\mu = E(X) = np$, $Var(X) = npq\frac{N-n}{N-1}$.

Rémarque : La variable hypergéométrique X dépend des 3 paramètres : N, effectif de la population, p, proportion primitive de boules blanches dans celle-ci, n, nombre de tirages successifs (effectif de l'échantillon).
En pratique : si $N > 10n$, la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N;n;p)$ est approchée par la loi binômiale $\mathcal{B}(n;p)$ (puisque $p = N_p/N$ est la proportion quasi-constante).

B. Lois infinies

6.1.5 Loi géometrique ou de Pascal $X \sim \mathscr{G}(p), p \in (0,1)$

La loi géométrique est la loi du premier succès, c'est-à-dire le nombre d'essais nécessaires pour faire apparaître un événement de probabilité p.

Définition : On répète de façon indépendante une expérience de Bernouilli autant de fois qu'il faut pour obtenir un succès. Soit X, le nombre d'essais nécessaires pour obtenir le 1-er succès. X suit une **loi géométrique de paramètre** p ou **loi de Pascal** de probabilité : $P(X = n) = p_n = pq^{n-1}, n = 1, 2, 3, \ldots$.

- **Notation :** $X \sim \mathscr{G}(p), p \in (0, 1)$

- **Paramètres :** $\mu = \frac{1}{p}$; $\sigma^2 = \frac{q}{p^2}$.

- **Formule de récurrence :** $P(X = n + 1) = P(X = n)(1 - p)$

- **Mode :** Puisque $0 < 1 - p < 1$, la formule de récurence montre que les probabilités successives décroissent constamment ; **le mode** a donc pour valeur 1.

- **Cas typique :** Tirage avec remise de n boules dans une urne ne contenant que deux sortes de boules (on s'intéresse à l'indice de la première obtention d'une boule d'un certain type) ;...

Définition : Une urne contient N boules, de c couleurs, dont M blanches, on pose $p = \frac{M}{N}$. On effectue plusieurs tirages d'une boule dans l'urne sans rémise. n est le nombre de tirages. La variable X qui signifie le nombre de tirages pour obtenir la première boule blanche suit la **loi de Pascal sans rémise** $\boldsymbol{X \sim \mathcal{S}(N, p)}$, dont les probabilités se calculent par :

$$P(X = k) = \frac{C_{N-M}^{k-1}}{C_N^{k-1}} \frac{M}{N - k + 1}, \quad \{k \in \mathbb{N}; 1 \leq k \leq N - M + 1\}$$

- **Paramètres :** $E(X) = \frac{N+1}{M+1}$, $Var(X) = q\frac{NM(N+1)}{(M+1)^2(M+2)}$.

6.1.6 Loi de Poisson $\boldsymbol{X \sim \mathcal{P}(\lambda)}$

La loi de Poisson est la loi des évènements rares (de petite probabilité) : maladies rares, accidents rares, pannes, radioactivité..., dont les chances de réalisation sont faibles. Pour que la loi s'applique il est nécessaire que la probabilité de réalisation de l'événement reste constante.

Définition : Une v.a. X suit une loi de Poisson de paramétre λ (λ réel strictement positif) si elle admet pour fonction de distribution l'ensemble des couples (k, p_k) avec $k \in \mathbb{N}$ et $p_k = P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$.

- **Notation :** $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$

- **Fonction de répartition :** $F(k) = P(X < k) = \sum_{0 \leq j < k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$.

- **Paramètres :** $\mu = \lambda$, $\sigma^2 = \lambda$.

- **Formule de récurrence :** $P(X = k + 1) = P(X = k)\frac{\lambda}{k+1}$

La distribution est de type **unimodal** et le mode est l'entier dans l'intervalle $[\lambda - 1, \lambda]$. Lorsque

λ a une valeur entière, la distribution admet deux modes successifs, équiprobables, bornes du même intervalle.

- **Forme de la distribution**

— Forme en L pour $\lambda \leq 1$;

— Forme en cloche dissymétrique pour $\lambda > 1$. Avec l'augmentation de λ le mode se déplace à droite.

- **Approximation de la loi Binomiale par la loi de Poisson**

La loi de Poisson fournit une bonne approximation de la loi binômiale lorsque :

$$n > 30; \quad n\,p < 5 \quad \text{ou } n\,q < 30$$

ou bien

$$n > 50; \quad p \leq 0.1; \quad npq < 20.$$

Mais quelles que soient les approches, on doit toujours avoir :

- n suffisamment grand (au minimum $n = 30$)
- p petit (au maximum $p = 0.10$)

Dans tous les cas, lorsqu'on utilisera cette approximation on prendra :

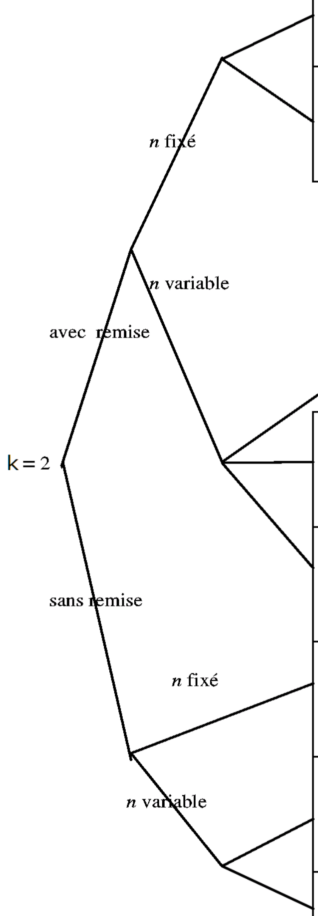
$$\lambda = \text{ espérance d'une v.a. binômiale } = np.$$

Factorielles

n	n !
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880
10	3628800
11	39916800
12	479001600
13	6227020800
14	87178291200
15	1307674368000
16	20922789888000
17	355687428096000
18	6402373705728000
19	121645100408832000
20	2432902008176640000

Lois discrètes présentées par des modèles d'urne

Une urne contient N boules, de c couleurs, dont M blanches et M_i de couleur i, $1 \leq i \leq c$. La probabilité de tirer une boule blanche est $p = \frac{M}{N}$.
La probabilité de tirer une boule de couleur i est $p_i = \frac{M_i}{N}$.
On effectue un ou plusieurs tirages d'une boule dans l'urne. n est le nombre de tirages.



	Expérience	Variable aléatoire X	Loi de X
$n = 1$	On effectue un seul tirage.	nombre de boules blanches obtenues	Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$
$n \geq 1$	On effectue n tirages avec remise.	nombre de boules blanches obtenues	Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ approchée par la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$ quand $n \geq 30$ et $p \leq 0{,}1$
	On effectue des tirages avec remise.	nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche	Géométrique $\mathcal{G}(p)$ ou $\mathcal{R}(1, p)$
$r \geq 1$	On effectue des tirages avec remise.	nombre de tirages nécessaires pour obtenir la r-ième boule blanche	Pascal $\mathcal{R}(r, p)$
$r \geq 1$	On effectue des tirages avec remise.	nombre de tirages de boules non blanches avant d'obtenir la r-ième boule blanche	Binomiale négative $\mathcal{BN}(r, p)$
$n \geq 1$	On effectue n tirages sans remise.	nombre de boules blanches obtenues	Hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$
$M = 1$	On effectue des tirages sans remise.	nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule blanche	Uniforme $\mathcal{U}(N)$ ou $\mathcal{S}(N, 1, p)$
$M \geq 1$, $1 \leq r \leq M$	On effectue des tirages sans remise.	nombre de tirages pour obtenir la r-ième boule blanche	Pascal sans remise $\mathcal{S}(N, r, p)$

Dans une urne, il y a N boules parmi lesquelles M de couleur blanche, $p = \frac{M}{N}$ et $q = 1 - p$.

Loi de X	Ensemble des valeurs possibles de X	Probabilités des valeurs de X	Espérance de X	Variance de X
Uniforme $\mathcal{U}(N)$	$\{1, \ldots, N\}$	$P(X = k) = \frac{1}{N}$	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{N^2-1}{12}$
Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$	$\{0, 1\}$	$P(X = 0) = q$ et $P(X = 1) = p$	p	pq
Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	$\{0, 1, \ldots, n\}$	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k\, q^{n-k}$	np	npq
Hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$	$[\max(0; n - N + M); \min(n; M)]$	$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \times \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	np	$npq\frac{N-n}{N-1}$
Géométrique $\mathcal{G}(p)$ ou $\mathcal{G}(1, p)$	$\mathbb{N}$	$P(X = k) = p\, q^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Pascal sans remise $\mathcal{S}(N, 1, p)$	$\{k \in \mathbb{N}; 1 \leq k \leq N - M + 1\}$	$P(X = k) = \frac{\binom{N-M}{k-1}}{\binom{N}{k-1}} \times \frac{M}{N-k+1}$	$\frac{N+1}{M+1}$	$q\frac{NM(N+1)}{(M+1)^2(M+2)}$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ

6.2 Problèmes

- uniforme discrète

63. On jette un dé bien équilibré. On considère la v.a. X qui donne le point obtenu sur la face supérieure.
Déterminer : a/ la fonction de distribution de X ; b/ la fonction de répartition de X ; c/ l'espérance mathématique et la variance de X.
Donner la représentation graphique de la fonctions de distribution et de la fonction de répartition de X

- distribution de Bernoulli

64. Une urne contient 5 boules rouges et 10 boules noires . On tire une boule de l'urne et on note sa couleur. II n'y a que 2 résultats possibles. C'est une épreuve de Bernoulli.
On appelle succès l'événement S : "tirer une boule rouge".
On désigne par X la v.a. qui prend la valeur 1 si S se réalise et la valeur 0 si $\bar{S}$ se réalise.
a) Donner la fonction de distribution (loi de probabilité) et la fonction de répartition de X.
b) Calculer les paramètres descriptifs.

- loi binomiale $X \sim \mathcal{B}((n, p)$

65. Avec les hypothèses de l'exercice 64, on fait 3 tirages successifs avec remises. Les trois tirage sont indépendants. On appelle A l'événement "tirer une seule boule rouge au cours de ces 3 tirages". Déterminer la probabilité de l'événement A.
Désignons par X la v.a. qui donne le nombre de boules rouges tirées au cours de ces 3 tirages.
a) Quelle loi suit X ? Déterminer les paramètres de la loi.
b) Quelles sont les valeurs prises par X ? Déterminer la fonction de distribution de X.
c) Déterminer la forme et le mode de la distribution de X.
d) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

66. On répète 8 fois de façon indépendante une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est 0,2. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 succès au cours de ces 8 épreuves ?

67. La v.a. X suit une loi binomiale avec $n = 50$ et $p = 0,1$. Déterminer $P(X = 10)$, $E(X)$ et $Var(X)$.

68. On lance 100 fois un dé régulier. Quelle est la probabilité d'obtenir 30 fois un 6 ? Combien de 6 peut-on espérer obtenir en moyenne ? Avec quel écart-type ?

69. 10 % des électeurs d'une commune sont défavorables à un projet de référendum sur l'avenir de la commune. On prélève, au hasard et avec remise et on enregistre l'opinion de 8 personnes dans le corps électoral de cette commune. Quelle est la probabilité pour que parmi ces 8 opinions enregistrés : a/ il y ait unanimité pour le référendum ; b/ il y ait unanimité contre le référendum ; c/ il y ait majorité pour le référendum.

70. Un examen se présente sous la forme de 20 questions. Pour chacune de ces questions, 5 réponses sont proposées, parmi lesquelles une seule est correcte. Supposons qu'un étudiant réponde au hasard à ces 20 questions. Quelle est la probabilité qu'il ait 10 réponses correctes ?

- loi hyper-géométrique $X \sim \mathcal{H}(N, n, p)$

71. Avec les conditions de l'exercice 64, on fait 3 tirages successifs mais sans remise. Les tirages ne sont plus indépendants. On désigne par A l'événement "tirer une boule rouge au cours de ces 3 tirages". Déterminer la probabilité de A.
Désignons par X la v.a. qui donne le nombre de boules rouge tirées au cours de ces 3 tirages. La v.a. X suit une loi hypergéométrique. Déterminer la fonction de distribution de X.
Calculer $E(X)$ et $Var(X)$.

- loi géométrique ou de Pascal $X \sim \mathcal{G}(p)$

72. Une urne contient 5 boules rouges et 10 boules noires. On fait des tirages successifs d'une boule avec remise. Quelle est la probabilité que la première boule rouge sorte : a/ au 3-ième tirage ; b/ au 4-ième tirage ; c/ au k-ième tirage ?

73. Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On effectue 5 tirages successifs sans remise d'une boule jusqu'à vider l'urne (tirages exhaustifs). Soit X la v.a. qui donne le rang de la première boule blanche tirée. Déterminer la fonction de distribution de X. Calculer $E(X)$ et $Var(X)$.

- loi de Poisson $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

74. Soit X une v.a. qui suit une distribution de Poisson de paramètre $\lambda = 5$. Déterminer a/ $P(X = 2)$; b/ $P(X < 1)$; c/ l'espérance mathématique de X ; d/ la variance de X.

75. Soit X une v.a. qui suit une distribution de Poisson de paramètre $\lambda = 3$. Déterminer : a/ $P(X \leq 2)$; b/$P(X > 1)$; c/ $P(1 \leq X < 3)$.

76. Soit X une v.a. qui suit une distribution binomiale : $X \sim B(10; 0.2)$. Déterminer : a/ $P(X = 3)$; b/ $P(X < 2)$; c/ $P(X \leq 9)$.

77. Le nombre d'appels téléphoniques arrivant dans une université par période de 15 secondes admet une distribution de Poisson de paramètre $\lambda = 3$. Soit X la v.a. qui donne le nombre d'appels pendant une période de 15 sec. Donner la signification et la probabilité des événements suivants : $P(X = 0)$; $P(X = 3)$; $P(X < 4)$; $P(X > 3)$.

78. Entre 14 h et 16 h le nombre moyen d'appels arrivant par minute au standard d'une compagnie est 2 appels. Trouver la probabilité que pendant une minute choisie au hasard pendant cette période il y ait : a/ aucun appel ; b/ 1 appel ; c/ moins de 4 appels ; d/ 4 appels au moins ; e/ plus de 6 appels.

79. Dans un service de réparation, on sait que l'on reçoit en moyenne 9 appels à l'heure.
Quelle est la probabilité qu'il y ait plus de 10 appels en une heure ?
Quelle est la probabilité pour qu'il y ait au plus 60 appels pendant une période de 6 h de travail ?

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

80. On a remarqué que 80 % des gens qui entrent dans un hypermarché ressortent avec au moins un achat. Si l'on prélève au hasard un échantillon de 60 personnes qui sortent, quelle est la probabilité pour que 50 d'entre elles aient effectué au moins un achat ?

81. Une usine fabrique des articles, dont 3 % défectueux. Trouver la probabilité dans un lot de 100 articles d'avoir : a/ aucun article défectueux ; b / 2 articles défectueux ; c/ plus que 3 articles défectueux.

Chapitre 7

Variable aléatoire continue (à densité)

7.1 Synthèse

• **Variable aléatoire continue** X est une variable qui peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle fini ou infini. En règle générale, toutes les variables qui résultent d'une **mesure** sont de type continu.

• **Densité de probabilité :** $f(x)$ au point x est la valeur limite de la densité moyenne sur l'intervalle $(x, x + \Delta x)$ lorsque la longueur Δx de cet intervalle tend vers 0 :

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x)}{\Delta x}$$

Si l'intervalle est assez petit pour qu'on puisse considérer $f(x)$ comme constant :

$$P(x \leq X \leq x + \Delta x) = f(x)\Delta x$$

Comme la variable aléatoire continue prend des valeurs dans un intervalle, l'observation d'une valeur concrète dépend de la précision de l'utile de mesure. C'est la raison pour laquelle **la probabilité pour que la variable aléatoire continue X prenne une valeur particulière x dans $\mathbb{R}$ (l'ensemble des nombres réels) est toujours nulle. On peut associer à x une densité de probabilité** $f(x)$ et on peut associer à un intervalle $[x, x + \Delta x]$ une probabilité non nulle.
Les notations suivantes sont identiques

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b).$$

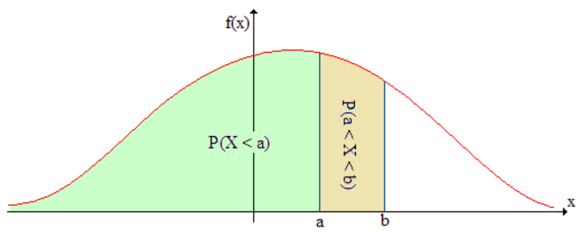
Soit une fonction f définie et continue sur V, On définit la probabilité pour que la variable aléatoire X soit comprise entre les valeurs x et $x + \Delta x$, où Δx est une quantité positive arbitrairement petite par la relation :

$$P(x \leq X \leq x + \Delta x) = f(x)\Delta x \text{ avec } [x, x + \Delta x] \subset V.$$

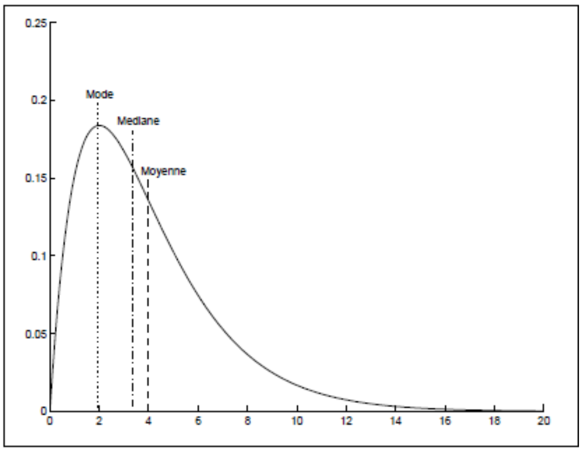
Pour que $f(x)\Delta x$ soit une probabilité, la fonction f doit satisfaire aux conditions suivantes :

pdp1. être positive : pour tout $x \in V$, $f(x) \geq 0$ (pour que P le soit) ;
pdp2. $\int_V f(x)\mathrm{d}x = 1$ (pour que $f(V) = 1$);
pdp3. être continue (pour admettre une primitive) ;
pdp4. $P(X = x) = 0$
pdp5. Si $[a, b] \subset V$, alors la probabilité attachée à l'intervalle (a, b) apparait comme $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, ce qui correspond à l'aire de la surface situé au-dessous de la courbe de densité, à droite de a et à gauche de b.

Densité de probabilité



Mode, médiane et moyenne



Cette fonction $f(x)$ est appelée **densité de probabilité.**

• **Représentation d'une loi de probabilité.** Pour une variable continue on représente la fonction densité de probabilité). La forme de la courbe obtenue s'appelle la forme de la distribution : uniforme, en L, en cloche, etc.

• **Fonction de répartition d'une loi de probabilité :** La fonction cumulative de distribution, ou **fonction de distribution** ou fonction de répartition F d'une v.a. continue X, ayant une densité de probabilité f, est définie par : $F(x) = P(X < x)$, $F(x) = \int_{V_{\min}}^{x} f(u)\mathrm{d}u$. La fonction de répartition $F(x)$ est la primitive de la fonction de densité $f(x)$, c'est-à-dire une fonction dont la dérivée est $f(x)$. $f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$.

— **Propriétés :**
pfr1. $F(V_{\min}) = 0$ et $F(V_{\max}) = 1$;
pfr2. $P(X > x) = 1 - F(x)$ pour tout réel x ;
pfr3. F est une fonction continue croissante ;
pfr4. La probabilité que X appartienne à l'intervalle (x_1, x_2), est égale, par définition, à la différence des valeurs prises par la fonction de répartition aux extrémités de l'intervalle : $P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1) = F(x_2) - F(x_1)$.

• **Représentation graphique de la fonction de répartition :** - "courbe des probabilités cumulées". $F(x)$ représente la surface délimitée par la courbe représentation de la loi entre $-\infty$ et l'abscisse x.

- **Quantile d'ordre p :** C'est la valeur x_p de X telle que $F(x_p) = p$. Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F continue et strictement croissante. Pour tout $p \in]0,1[$ nous appelons **quantile d'ordre** p la racine x_p de l'équation en x : $F(x) = p$, tel que $P(X \leq x_p) = p$ ou encore $F(x_p) = p$..
Pour $p = 1/2$, on parle de **médiane**.

- **Médiane :** La médiane $Me = \eta$ est la valeur η de X pour laquelle $P(X \leq \eta) = P(X \geq \eta) = 1/2$. La **médiane** est le quantile d'ordre 1/2.

- **Mode : Le mode** x_m est la valeur de X dont la probabilité est maximale.

- **Espérance mathématique (moyenne) :**

$$E(X) = \int_V x f(x) \mathrm{d}x$$

— **Propriétés de l'espérance mathématique :**

pe1. Soit a, $b = const.$ et X une variable aléatoire : $E(aX + b) = aE(X) + b$,

pe2. Soit X et Y deux variables aléatoires : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

pe3. Soit X et Y deux variables aléatoires **indépendantes** : $E(X.Y) = E(X).E(Y)$.

- **Variance :** La variance est l'espérance du carré de la variable centrée. $\sigma^2 = \int_V (x - \mu)^2 f(x) \mathrm{d}x = E(X^2) - E(X)^2$.

— **Propriétés de la variance :**

pv1. Soit $a, b = const.$ et X une variable aléatoire : $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$.

pv2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes. $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$.

- **Variable réduite :** Une variable aléatoire X est dite réduite si son écart-type est égal à 1. La variable aléatoire $\frac{X}{\sigma}$ admet une variance de 1 et est appelée variable réduite.

- **Variable centrée réduite ou standardisée :** Une variable aléatoire centrée réduite est dite standardisée (ou variable normalisée). La variable aléatoire $Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est normalisée.

- **Moment d'ordre supérieur :**

— On appelle **moment d'ordre** k la grandeur : $m_k = E(X^k)$.

— Le **moment centré d'ordre** k est le moment d'ordre k de la variable centrée : $\mu_k = E[(X - E(X))^k]$.

On a donc $m_1 = E(X), \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = Var(X)$.

- **coefficient d'asymétrie** : $\beta = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$.

Le coefficient d'asymétrie est une grandeur sans dimension. Sa valeur compare la forme de la distribution à celle de la loi gaussienne. Un coefficient d'asymétrie négatif montre que la dissymétrie provient de valeurs élevées de X (dissymétrie à droite). La valeur positive du coefficient d'asymétrie signifie que la dissymétrie est à cause des valeurs petites de X (dissymétrie à gauche).

- **coefficient de Kurtosis :** ou aplatissement comparé à la loi Normale : $\delta = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$. Facteur sans dimension, il permet de comparer si une distribution est plus aplatie ou moins aplatie qu'une distribution gaussienne (espérances et variances égales).

Test sur le chapitre : Variable aléatoire continue (à densité)

1. Donner la définition d'une variable aléatoire continue.
2. Comment on définit la probabilité d'un événement de type $[a, b]$?
3. Exprimer la probabilité que la variable aléatoire à densité X prenne la valeur x dans l'intervalle $[a, b]$?
4. Quelles conditions doit vérifier une fonction f pour être densité de probabilité d'une variable aléatoire continue ?
5. Quel est le lien entre densité et fonction de répartition ?
6. Connaissant la fonction de répartition F de X, comment calculer $P(a < X < b)$?
7. Quelles formules permettent de calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire continue X de densité f ?

7.2 Problèmes

82. Soit X une variable aléatoire continue réelle de fonction de répartition :

$$F(x) : \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x, & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 1, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Trouver la densité de probabilité, l'espérance et la variance.

83. Soit X une variable aléatoire continue réelle de densité de probabilité :

$$f(x) : \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}e^{-x/2}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Trouver la fonction de répartition, l'espérance, la variance et l'écart-type.

Chapitre 8

Lois de probabilité continues particulières

8.1 Synthèse

8.1.1 Loi uniforme continue $X \sim \mathcal{U}[a;b]$

- **Densité de probabilité** $f(x)$ **et fonction de répartition** $F(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)}, & \text{si} \quad x \in [a,b] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad a < x \leq b \\ 1 & \text{si} \quad x > b \end{cases}$$

- **Paramètres descriptiffs :** N'a pas de mode ; Médiane $M_e = \frac{a+b}{2}$; Moyenne $\mu = \frac{a+b}{2}$. Variance $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$.

8.1.2 Distribution normale (dite de Laplace - Gauss) $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ ou $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

- **Situation concrète :** Lorsque on est dans **une situation où la distribution dépend d'un *grand nombre* de causes plus ou moins *indépendantes* et aucune n'est pas *prépondérante*, dont les effets sont faibles et *s'additionnent*, alors on est en présence de la distribution normale.**

- **Distribution de probabilité :** $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}; \;\; \mu \geq 0; \;\; \sigma > 0.$

- **Fonction de répartition :** $F(x) = P(X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx.$

- **Forme :** courbe en cloche

- **Les intervalles "Un, deux, trois sigma" :** Les observations sont groupées autour de la moyenne :

50 %	sont dans l'intervalle	$(\mu - \frac{2}{3}\sigma, \mu + \frac{2}{3}\sigma)$,
68 %	sont dans l'intervalle	$(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$,
95 %	sont dans l'intervalle	$(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$,
99,7 %	sont dans l'intervalle	$(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$.

- **Caractéristiques de la loi normale**

Mode égal à la moyenne μ : $M_e = \mu$; **Moyenne :** μ ; **Variance :** σ^2 ; **Ecart-type :** σ.

- **Probabilité attachée à un intervalle :** On peut toujours exprimer la fonction de répartition à l'aide de la fonction de répartition $F(t) = \pi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{\frac{x^2}{2}} dx$ dite fonction de Laplace ou fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. La fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est tabulée.

$$\begin{aligned} P(X < x) &= \pi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \\ P(a < X < b) &= \pi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \pi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Stabilité de la loi normale : Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes. Si X_1 suit $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ et X_2 suit $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$, alors $X_1 + X_2$ suit $\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.

8.1.3 Distribution normale centré réduite ou loi normale standardisée $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$

La distribution normale centré réduite ou ls loi normale standardisée $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ est la distribution normale de moyenne nulle et de variance égale à 1.

$$\begin{array}{lcl} X \to \mathcal{N}(\mu, \sigma) & & Z \to \mathcal{N}(0, 1) \\ E(X) = \mu & Z = \frac{X-\mu}{\sigma} & E(Z) = 0 \\ Var(X) = \sigma^2 & & Var(Z) = 1 \end{array}$$

- **Fonction de densité :** $f(t)$ **et fonction de répartition :** $F(Z < t) = \pi(t)$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}; \quad \pi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2} dx.$$

La fonction $f(t)$ est paire : $\boldsymbol{f(-t) = f(t)}$.
La courbe de densité de probabilité est donc symétrique par rapport à la droite d'abscisse $t = 0$: pour $t > 0$ $\boldsymbol{\pi(-t) = 1 - \pi(t)}$.

- **Paramètres descriptifs :** $E(Z) = 0$, $V(Z) = 1$, $\sigma = 1.$, $M_o = M_e = \mu = 0$.

Le **quantile** t_p, $(0 < p < 1)$ est la valeur de Z telle que $\pi(t_p) = p$.

• **Probabilité d'intervalles**

— **Intervalle du type** $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$

A l'aide des valeurs dans la table nous pouvons calculer la probabilité d'un événement du type $a \leq Z \leq b$: $P(a \leq Z \leq b) = P(Z \in [a, b]) = \pi(b) - \pi(a)$.

— **Intervalle du type** $[-\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}]$: $P(-t \leq Z \leq t) = 2P(0 \leq Z \leq t) = 2(\pi(t) - 0,5)$.

— **Intervalles remarquables :**

$$P(-1 \leq Z \leq 1) = 0,683$$
$$P(-2 \leq Z \leq 2) = 0,954$$
$$P(-3 \leq Z \leq 3) = 0,997$$

• **Intervalle centré en** 0 **de probabilité donnée :** Soit α un niveau de probabilité $(0 < \alpha < 1)$.

Recherchons l'intervalle $[-t, t]$ centré en 0 tel que $P(-t < Z < t) = 1 - \alpha$.

Comme $(-t < Z < t) = 2\pi(t) - 1$, pour $P(-t < Z < t) = 1 - \alpha$ on obtient $2\pi(t) - 1 = 1 - \alpha$ $\Longrightarrow \pi(t) = 1 - \frac{\alpha}{2}$. A l'aide des tables nous pouvons déterminer $Z = t_p$ tel que $\pi(t_p) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

— **Cas particuliers :**

α	$Z \sim \mathcal{N}(0.1)$	$1 - \frac{\alpha}{2}$
0.20	$P(-1.282 < Z < 1.282) = 0.80$	0.9
0.10	$P(-1.645 < Z < 1.645) = 0.90$	0.95
0.05	$P(-1.96 < Z < 1.96) = 0.95$	0.975
0.01	$P(-2.576 < Z < 2.576) = 0.99$	0.995

Les valeurs les plus souvent utilisées sont :

$$t_{u-0.05} \approx 1.645, \quad t_{b-0.05} \approx 1.96, \quad \text{et} \quad t_{0.01} \approx 2.58$$

$\pi(t_{u-0.05}) = \pi(1.645) = 0,9500$, utilisée dans les tests unilatéraux et sert à 5 %, $pi(t_{b-0.05}) = \pi(1,96) = 0,9750$, dans les tests bilatéraux sert à 5 %. En plus, $t_{0.05}$ est le réel pour lequel $P(-t_{0.05} \leq Z \leq t_{0.05}) = 0.95$ et on a donc : $P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) \approx 0.95$ de même, $P(-2.58 \leq Z \leq 2.58) \approx 0.99$. Cela donne une idée de la répartition des valeurs de Z. Environ 95% des réalisations de Z se trouvent entre -1.96 et +1.96. De la même façon 99 % des valeurs se trouvent entre -2,576 et + 2.576.

• **Lien entre la loi** $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ **et la loi** $\mathcal{N}(0, 1)$

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, on peut passer de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ à la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et inversement en posant $\boldsymbol{Z = (X - \mu)/\sigma}$, ce qui entraîne $\boldsymbol{X = \sigma Z + \mu}$.

8.1.4 Détermination pratique des probabilités : usage des tables de la loi normale

Table de la fonction de répartition $\pi(t) = P(Z < t)$ de la loi normale centrée réduite. La I^{ere} valeur de t donnée par la table est $t = 0$.
Pour $t = 0$, on a $P(Z < 0) = \pi(0) = 0.50$.

1. $P(Z < 1.47)$. En lisant directement la table (ligne 1.4 et colonne 0.07), nous avons $P(Z < 1.47) = \pi(1.47) = 0.9292$,

2. $P(Z > 1.47) = 1 - P(Z < 1.47) = 1 - 0.9292 = 0.0708$.

3. $P(Z < -0.66)$. La table ne donne $P(Z < t)$ que pour $t > 0$. Lorsque $t < 0$, il faut utiliser la caractéristique de $f(t)$ qui est symétrique par rapport à $E(z) = \mu = 0$,

$$P(Z < -0.66) = \pi(-0.66) = 1 - \pi(0.66) = 1 - 0.7454 = 0.2546$$

4. $P(Z > -0.66) = P(Z < 0.66) = \pi(0.66) = 0.7454$. -symétrie par rapport à $E(z) = 0$.

5. $P(0.56 < Z < 1.24)$

$$\begin{aligned} P(0.56 < Z < 1.24) &= P(Z < 1.24) - P(Z < 0.56) \\ &= \pi(1.24) - \pi(0.56) = 0.8925 - 0.7123 \\ &= 0.1802 \end{aligned}$$

6. $P(-2 < Z < 2)$

$$\begin{aligned} P(-2 < Z < 2) &= \pi(2) - \pi(-2) = \pi(2) - (1 - \pi(2)) \\ &= \pi(2) - 1 + \pi(2) \\ &= 2\pi(2) - 1 = 2 \times 0.9772 - 1 = 0.9544 \end{aligned}$$

7. $P(Z < 1.5 \text{ ou } Z > 2.3)$: 2 solutions sont possibles :

$$\begin{aligned} \circ \quad P(Z < 1.5 \text{ ou } Z > 2.3) &= P(Z < 1.5) + P(Z > 2.3) \\ &= \pi(1.5) + 1 - \pi(2.3) \\ &= 0.9332 + 1 - 0.9893 = 0.9439 \\ \circ \quad P(Z < 1.5 \text{ ou } Z > 2.3) &= 1 - P(1.5 < Z < 2.3) \\ &= 1 - (\pi(2.3) - \pi(1.5)) \\ &= 1 - 0.9893 + 0.9332 = 0.9439 \end{aligned}$$

8. Calculer t sachant que $P(Z < t) = 0.8508$.
La probabilité est supérieure à $0.5 \Rightarrow t > 0$. En lisant directement la table, on voit que pour $t = 1.04$, $\pi(t) = 0.8508$.

9. Calculer t sachant que $P(Z < t) = 0.0116$.
La probabilité est inférieure à 0.5 $\Rightarrow t < 0$. On sait que $\pi(-z) = 1 - \pi(t) = 0.0116$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \pi(t) = 1 - 0.0116 = 0.9884 &\Rightarrow t = 2.27 \\ &\Rightarrow t = -2.27 \end{aligned}$$

10. Calculer t sachant que $P(Z > t) = 0.123$.
On sait que $P(Z > t) = 1 - P(Z < t) = 1 - \pi(t) = 0.123$

$$\Rightarrow \pi(t) = 1 - 0.123 = 0.877 \Rightarrow t = 1.16$$

11. Calculer t_1 et t_2 sachant que $t_2 = -t_1$ et que $P(t_1 < Z < t_2) = 0.903$.

$$\begin{array}{cl} \text{Comme} & t_2 = -t_1 \\ \Rightarrow & \pi(t_2) - \pi(t_1) = \pi(t_2) - \pi(-t_2) \\ = & \pi(t_2) - (1 - \pi(t_2)) \\ = & 2\pi(t_2) - 1 = 0.903 \\ \Rightarrow & 2\pi(t_2) = 1.903 \Rightarrow \pi(t_2) = 0.9515 \\ & \Rightarrow t_2 = 1.66; \quad t_1 = -1.66 \end{array}$$

Test sur le chapitre : Lois de probabilité continues

1. Décrire la loi uniforme continue. Pour une variable aléatoire continue X, qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$, donnez la fonction de répartition $f(x)$.

2. Décrire la situation du phénomène pour que la distribution de la variable aléatoire correspondante soit indiquée comme normale.

3. Expliquer les paramètres μ et σ de la notation $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ de la loi normale.

4. Décrire la loi normale standardisée.

8.2 Problèmes

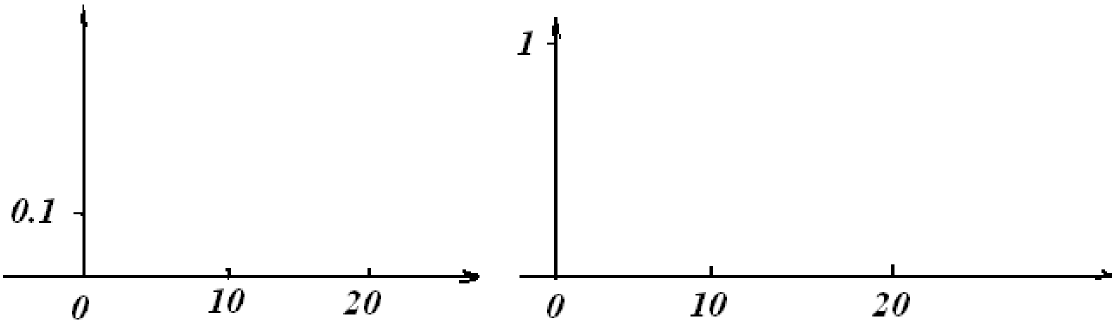
- loi uniforme continue $\boldsymbol{X \sim \mathcal{U}[a; b]}$

84. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme continue : $X \sim \mathcal{U}[1; 8])$
a) Déterminer la loi (la fonction de densité) et la fonction de répartition de la v.a.
b) Calculer les probabilités suivantes :

$$P(X = 3); \quad P(X \leq 5), \quad P(X < 5), \quad P(2 \leq X < 6).$$

c) Déterminer la moyenne et l'écart-type.

85. Soit X une v.a. admettant une distribution uniforme continue sur l'intervalle $[0; 20]$.
a/ Déterminer la loi (ou fonction de densité) et la fonction de répartition de la v.a. X ;



b/ Calculer $P(5 \leq X \leq 10)$; $E(X)$ et $V(X)$.

86. Le temps d'attente (en minutes) d'un résultat au cours d'un jeu électronique admet une distribution continue uniforme sur l'intervalle $[1; 6]$. Déterminer :
a/ la probabilité d'attendre au moins 4 minutes ; b/ le temps moyen d'attente.

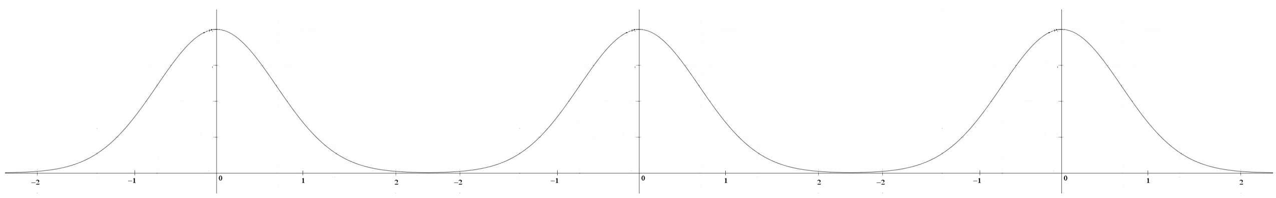
- loi normale de Laplace-Gauss $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

87. La v.a. $X =$ "poids d'un foie gras", suit une loi $\mathcal{N}(550; 100)$. Quelle est la probabilité pour qu'un foie gras pèse moins de 650g, plus de 746g, moins de 500g, entre 550 et 600g ?

88. Lors d'un procès en attribution de paternité, un expert témoigne que la durée de la grossesse, en jours, c'est-à-dire le laps de temps entre la conception et la naissance de l'enfant, est de distribution approximativement normale avec paramètres $\mu = 270$ et $\sigma^2 = 100$. L'un des pères putatifs est en mesure de prouver son absence du pays pendant une période s'étendant entre le 290-ème et le 240-ème jour précédent l'accouchement. Quelle est la probabilité que la conception ait eu lieu à ce moment ?

89. Soit X une v.a, qui suit une distribution normale d'espérance mathématique 30 et d'écart type 5.
a/Représenter graphiquement les événements suivant :

$$\{X \leq 35\}; \ \{X \geq 40\}; \ \{X \leq 30\}; \ \{25 \leq X \leq 45\}.$$



b/ Déterminer la v.a. centrée réduite associée à X et traduire les événements donnés à l'aide de la v.a. Z et calculer leur probabilité.
c/ Déterminer les probabilités suivantes :

$$P(X \leq 25); \ \ P(X \geq 30); \ \ P(X \leq 37.4); \ \ P(15 \leq X \leq 25).$$

90. Soit X une v.a. qui suit une distribution normale d'espérance mathématique 53 et d'écart type 10. Déterminer les probabilités suivantes :

$$P(X \leq 73); \quad P(X \geq 38); \quad P(33,4 \leq X \leq 72,6).$$

91. On a établi que les bénéfices moyens quotidiens en milliers d'euros d'une entreprise sont distribués suivant la loi normale $\mathcal{N}(75; 25)$. Que représente les valeurs 75 et 25 ? Quelle est la probabilité que le bénéfice moyen quotidien soit supérieur à 80000 € ?

92. Soit X une v.a. qui suit une loi normale $X \sim \mathcal{N}(30; 5)$. Déterminer les valeurs x de cette variable pour lesquelles : $P(X \leq x) = 0,8413$; $P(X \geq x) = 0,9332$; $P(20 \leq X \leq x) = 0,9544$.

93. Soit une v.a. $X \sim \mathcal{N}(50; 10)$. Déterminer les quartiles de cette distribution.

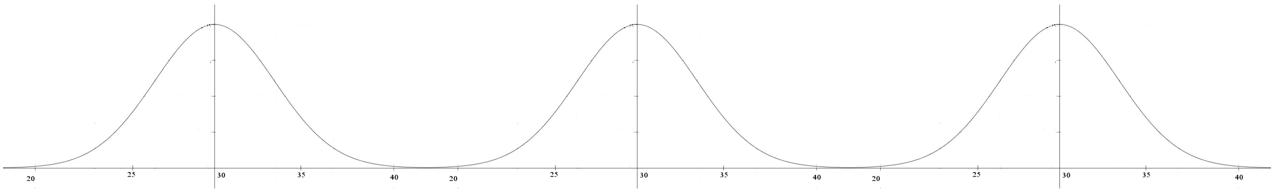
94. Si variable aléatoire X = 'âge des personnes d'un groupe" suit la loi normale $\mathcal{N}(21; 2)$, déterminer : a/ le pourcentage théorique des personnes ayant au moins 23 ans
b/ l'âge au-dessous duquel on trouve 33 % des personnes.

95. En supposant que les bénéfices quotidiens d'un magasin admettent une distribution normale de moyenne 1 000 € et d'écart-type 150 €, déterminer :
a/ la probabilité d'avoir un bénéfice quotidien supérieur ou égal à 1250 € ;
b/ la valeur des quartiles de cette distribution (arrondis au nombre entier le plus proche)

- loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$

96. On considère la v.a. X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
a/Représenter graphiquement les événements suivant :

$$\{X < 1\}; \quad \{X > 1,5\}; \quad \{X < -1,5\}; \quad \{-1 < X < 2\}$$



b/ Déterminer les probabilités suivantes : $P(X \leq 1,47)$; $P(X \leq -1,47)$; $P(1,22 \leq X \leq 2,58)$; $P(X \geq 1,48)$; $P(X \leq 0,86)$; $P(X \geq -1,47)$; $P(X < -1,2)$; $P(X < 0)$; $P(X = 2)$.

97. On considère la v.a. Z qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Déterminer :
$P(Z \leq 1,9)$; $P(1 \leq Z \leq 2,5)$; $P(-1,2 < Z < 1,9)$; $P(-1,2 \leq Z \leq 1,2)$; $P(-1 \leq Z \leq 1)$; $P(-2 \leq Z \leq 2)$; $P(-3 \leq Z \leq 3)$; $P(-t \leq Z \leq t)$.

98. Déterminer les valeurs t de la v.a. normale centrée réduite Z pour lesquelles on a :
$P(Z \geq t) = 0,5$; $P(Z \leq t) = 0,932$; $P(Z \leq t) = 0,012$; $P(Z \geq t) = 0,975$; $P(t \leq Z \leq 3) = 0,7907$; $P(-t \leq Z \leq t) = 0,95$

Loi de probabilité continues particulières. Indications et résultats.

84. $P(X = 3) = 0$ comme X est une variable aléatoire continue ; $P(X \leq 5) = \frac{4}{7}$; $E(X) = 4,5$;

87.$P(X < 650) = 0,8413$; $P(X > 746) = 0,025$; $P(X < 500) = 0,3413$;

88. $P(X > 290 \cup X < 240) = 0,02415$.

Chapitre 9

Conditions d'application de la loi normale. Convergence en loi

9.1 Synthèse

• **Loi des grands nombres et théorème de la limite centrale ou central-limite (T.C.L.)**
Soit X une variable aléatoire d'espérance mathématique μ.

— **Théorème : La loi forte des grands nombres** Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ une suite infinie de variables aléatoires indépendantes obéissant toutes à une même loi de probabilité ayant une espérance mathématique μ. Alors avec une probabilité égale à 1, la suite des variables aléatoires

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$

tend vers μ lorsque n augmente indéfiniment.
Ce résultat permet de relier la théorie à la pratique.
Nous aurons besoin, en Statistique, de préciser ceci, c'est-à-dire d'avoir une idée de la grandeur de $|\bar{X} - \mu|$. Nous nous servirons pour cela du **théorème de la limite centrale.**

— **Théorème central-limite /TCL/**
Si $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de probabilité de paramètres connus μ_1, μ_2, …, μ_n et σ_1, σ_2, …, σ_i, …, σ_n, la variable aléatoire Y définie comme la somme de ces n variables aléatoires indépendantes tend à suivre une loi normale dès que n est grand :

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_i + \ldots + X_n \to_{n\to\infty} \mathcal{N}(\mu, \sigma),$$

avec $\mu = \sum_i \mu_i$ et $\sigma^2 = \sum_i \sigma_i^2$
ou, avec une conclusion formulée autrement

$$\sqrt{n}\left(\frac{Y}{n} - \mu\right) \to \mathcal{N}(0, \sigma), \quad \text{autre écriture} \quad \frac{Y - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \to \mathcal{N}(0, 1).$$

Ce théorème montre encore que, bien souvent, la loi d'une variable aléatoire X est approximativement une loi gaussienne.

- **Approximation de la loi binômiale par la loi normale. Théorème de Moivre-Laplace - un cas particulier du théorème central-limite**

Si une variable aléatoire X obéit à la loi binômiale $\mathcal{B}(n,p)$, le produit $np(1-p)$ étant grand, la variable aléatoire $\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ obéit à une loi qui est proche de la loi gaussienne réduite, c.a.d.
Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors $\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \to_{n\to+\infty} \mathcal{N}(0,1)$.

Remarques :

— L'approximation devient valable si : $npq > 9$; ou $n > 20$ et $np > 10$ et $nq > 10$; ou $n > 30$ et $np > 5$ et $nq > 5$..

— L'approximation pose le problème du passage d'une loi discrète à une loi continue.
On doit donc substituer à une valeur discrète un intervalle continu. On doit remplacer k par l'intervalle $[k-0.5, k+0.5]$. Cette substitution est qualifiée de **correction de continuité.**
Par exemple la valeur 8 est remplacée par l'intervalle $[7.5; 8.5]$ et
$P(X=8) = P(7.5 < Z < 8.5)$.

- **Règles à utiliser pour la correction de continuité**

— pour calculer $P(X \geq x)$: soustraire 0.5 de $x \Longrightarrow P(X \geq x) = P(Z > x - 0.5)$

— pour calculer $P(X < x)$: soustraire 0.5 de $x \Longrightarrow P(X < x) = P(Z < x - 0.5)$

— pour calculer $P(X > x)$: ajouter 0.5 à $x \Longrightarrow P(X > x) = P(Z > x + 0.5)$

— pour calculer $P(X \leq x)$: ajouter 0.5 à $x \Longrightarrow P(X \leq x) = P(Z < x + 0.5)$

— $P(a \leq X \leq b) \approx P\left(\frac{a-0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq Z \leq \frac{b+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$

Dans le cas où l'intervalle considéré pour X englobe une grande partie de l'étendue totale, la correction n'a pas beaucoup d'influence.

— $P(X=a) \approx P\left(\frac{a-0.5}{\sqrt{np(1-p)}} \leq Z \leq \frac{a+0.5}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$

Quel que soit n, il n'est pas question de supprimer ± 0.5.

- **Approximation de la loi de Poisson par la loi de Gauss**

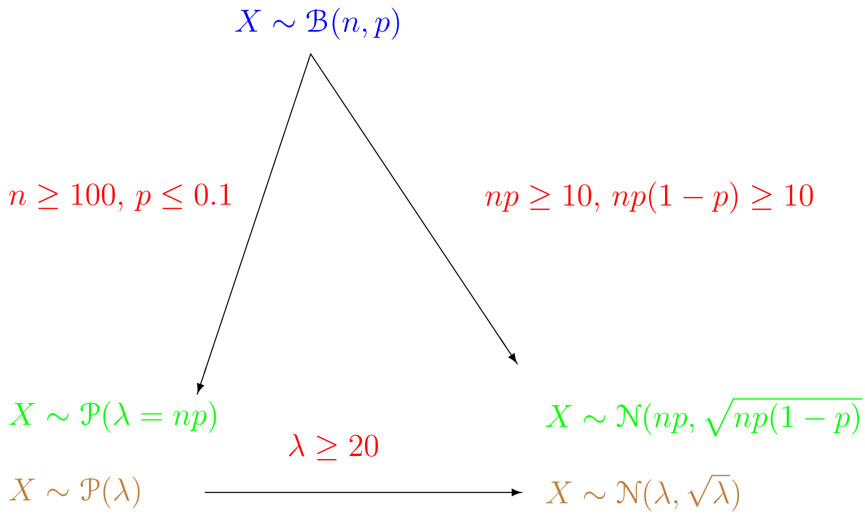
Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Dans le cas où λ a une valeur suffisamment élevée, on peut considérer que X suit loi $\mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda})$.

Le critère empirique, généralement utilisé pour décider la validité de l'approximation de la loi de Poisson par la loi de Gauss est : $\lambda \geq 20$.

Comme l'approximation est d'une loi discrète par une loi continue, il est nécessaire d'introduire une correction de continuité.

- **Rapports mutuels des lois de probabilité binômiale et de Poisson et la loi normale**

Le schéma ci-dessous et Figure 9.1 résument les principales approximations.



Test sur le chapitre : Conditions d'application de la loi normale. Convergence en loi

1. Énoncer le théorème de la limite centrale.
2. Quelle est la base théorique pour la convergence en loi ?
3. Pourquoi on utilise la convergence en loi ?
4. Qu'est-ce que la correction de continuité et quand on la pratique ?

9.2 Problèmes

- approximation par une loi de Poisson ou une loi normale

99. On a constaté que 10 % des pièces fabriquées par une machine sont défectueuses. On considère la variable aléatoire X qui donne le nombre de pièces défectueuses dans un échantillon de n pièces. Expliquer pourquoi la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Déterminer $E(X)$ et $Var(X)$.
a/ On considère un échantillon de 10 pièces Calculer $P(X = 2)$
Si Y est une v.a. qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$, déterminer $P(Y = 2)$
b/On considère un échantillon de 30 pièces. Calculer $P(X = 2)$
Si Y est une v.a. qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$, déterminer $P(Y = 2)$
c/ On considère un échantillon de 100 pièces. Calculer $P(X < 5)$
Si Y est une v.a. qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 10$, déterminer $P(Y < 5)$

Si Y est une v.a. qui suit une loi normale de paramètres $\mu = 10$ et $\sigma = 3$, déterminer $P(Y < 5)$
d/Quelle est la probabilité que dans un échantillon de 400 pièces produites par cette machine il y ait au plus 40 pièces défectueuses ?

100. Un étudiant prend le bus pour se rendre à l'université. Le temps qui sépare l'instant où il quitte son domicile et l'instant où il arrive à l'université est distribué suivant une loi normale de moyenne 35 (min) et d'écart-type 5 (min). S'il n'a pas fait la fête la veille, il quitte son domicile 40 minutes avant le début des cours. Dans le cas contraire, une fois sur deux, il quitte son domicile 25 minutes avant le début des cours et, une fois sur deux il reste chez lui pour la journée, il estime que sa probabilité de faire la fête est de 0,2. On fait en outre l'hypothèse qu'il y a indépendance entre des événements relatifs à des journées différentes.
a/ Déterminer la probabilité qu'il reste chez lui la journée.
b/ Déterminer la probabilité qu'il arrive à l'heure à l'université.
c/ Soit X la v.a. correspondant au nombre de journées au cours d'un semestre de 13 semaines de 5 jours pendant lesquelles il est arrivé à l'heure à l'université. Déterminer l'espérance mathématique de X.

101. Le directeur marketing d'une entreprise utilise deux supports publicitaires pour vanter les charmes de son produit auprès des consommateurs potentiels, un quotidien national, et une chaîne de télévision. Les chiffres qui suivent portent sur les consommateurs potentiels du produit :
- un consommateur sur dix est touché par le journal, contre un sur cinq par la télévision ; il faut cependant noter qu'un consommateur sur vingt est touché simultanément par les deux supports.
- un consommateur sur dix achète le produit, parmi les consommateurs touchés par la publicité, contre un sur cinquante parmi ceux qui ne sont pas touchés.
a/ Calculer la probabilité pour qu'un consommateur soit touché par la publicité.
b/ On choisit un consommateur au hasard, et on appelle succès le fait qu'il soit acheteur du produit. Quelle est la probabilité du succès ?
On suppose qu'il y a 10 000 consommateurs parmi lesquels on choisit au hasard 100 consommateurs différents. On note X la variable aléatoire réelle associée au "nombre d'acheteurs parmi les cent consommateurs choisis"
c/ Quelle est la loi de probabilité exacte du nombre de X ? Préciser ses paramètres. Déterminer son espérance et sa variance.
d/ Par quelle(s) loi(s) discrète(s) peut-on approximer la loi de X ? Justifier votre réponse et préciser ses paramètres. Indiquer l'espérance et la variance correspondant à chaque approximation.
e/ Évaluer alors les probabilités : $P(X = 2)$ et $P(1 < X < 5)$, en utilisant ces deux approximations tour à tour.
f/ Pourquoi l'approximation normale de la loi de X n'est-elle pas entièrement justifiée ? Comparer les résultats précédents à ceux que donne l'approximation normale.

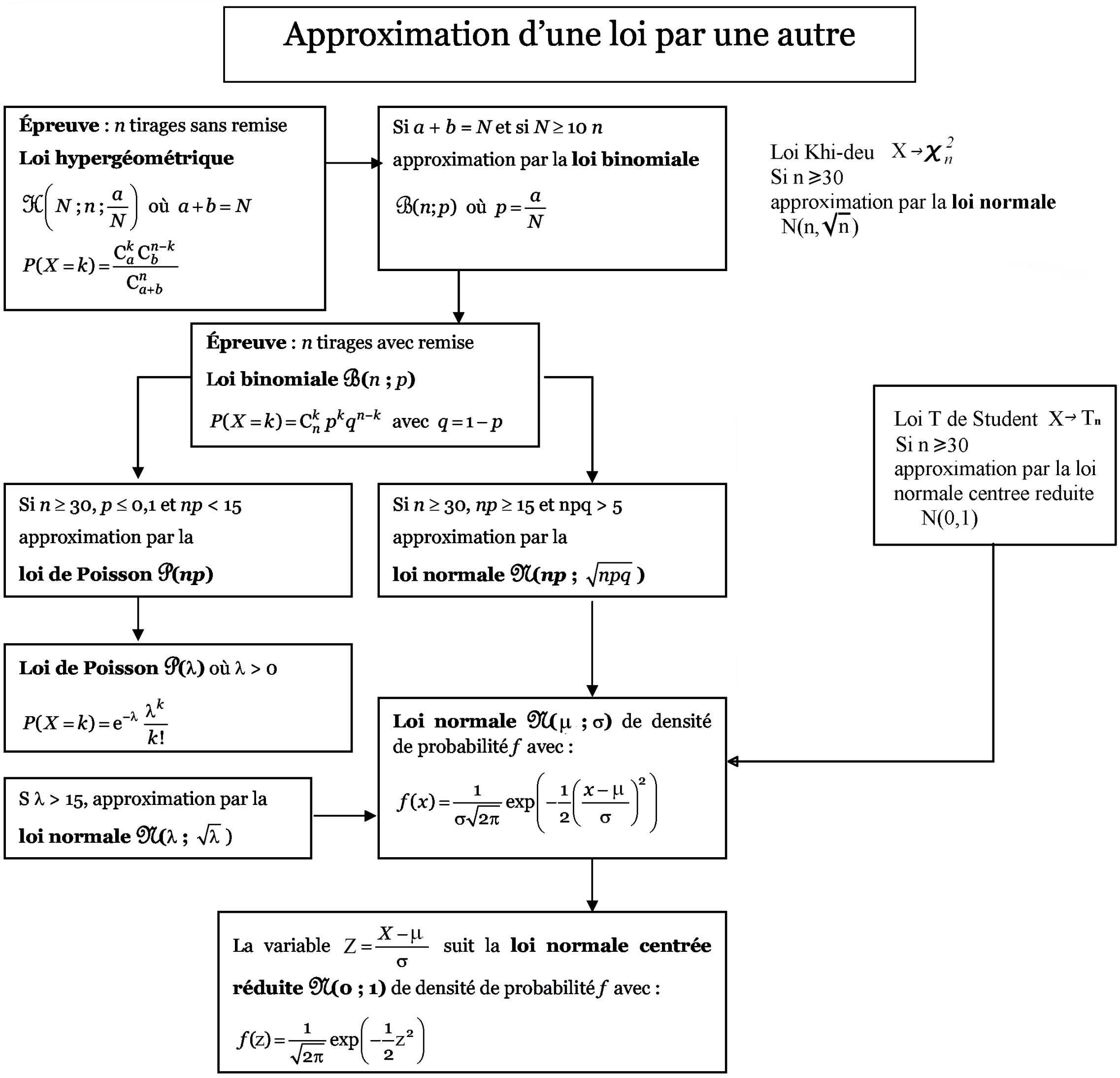


Figure 9.1 : Convergence en loi

Chapitre 10

Fonctions de variables aléatoires

10.1 Synthèse

• **Addition de variables aléatoires indépendantes**

— **Additivité de deux variables indépendantes binômiales** Soit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n',p)$. Lorsque X et Y sont indépendantes,

$$X + Y \sim \mathcal{B}(n+n',p).$$

— **Additivité de deux variables indépendantes suivant la loi de Poisson** Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$, sont deux variables indépendantes suivant la loi de Poisson,alors

$$X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2).$$

— **Additivité de deux variables indépendantes normales** Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2)$, alors

$$X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}) \quad \text{et} \quad aX \pm bY \sim \mathcal{N}(a\mu_1 \pm b\mu_2, \sqrt{a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2}).$$

• **Fonctions non linéaires de variables aléatoires**

— **La loi de "Khi-deux" $X \sim \chi^2_\nu$.**

Découverte en 1905 par le mathématicien britannique Karl Pearson (1857-1936). La loi de Pearson ou loi du khi-deux (χ^2) est importante, non pas, comme les lois précédemment étudiées, pour la représentation de séries statistiques observées. Elle est inventée pour les besoins des tests statistiques, notamment le test d'ajustement d'une loi théorique à une distribution observée, le test d'indépendance de deux caractères qualitatifs et pour déterminer la loi de la variance d'un échantillon. Ce sont les test du khi-deux.

Définition : Soit X_1, X_2, ..., X_i, ..., X_ν ν variables aléatoires normales centrées réduites indépendantes.
La variable aléatoire X définie par

$$X = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_i^2 + \ldots + X_\nu^2 = \sum_{i=1}^{\nu} X_i^2$$

admet une loi de probabilité désignée par χ^2 et appelée “Khi-deux” (ou “Khi-carré”) à ν degrés de liberté.

Densité de probabilité : La variable aléatoire $X \sim \chi^2_\nu$ varie entre 0 et l'infinie et a pour densité de probabilité :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \le 0 \\ c_\nu x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

c_ν étant une constante positive dépendant de ν, telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, $c_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Forme : dissymétrique avec étalement vers la droite. Tend à devenir symétrique lorsque le nombre ν de degrés de liberté augmente.

Paramètres descriptifs :

$$E(X) = \nu, \quad Var(X) = 2\nu.$$

Somme de deux variables qui suivent une loi du χ^2
Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes obéissant respectivement aux lois de Pearson à m et n degrés de liberté ; leur somme $X + Y$ obéit à la loi de Pearson à $m+n$ degrés à liberté :

$$X \sim \chi^2_n, Y \sim \chi^2_m \Rightarrow X + Y \sim \chi^2_{n+m}.$$

Respectivement pour la soustraction on a : Si $X \sim \chi^2_n$ et $Y \sim \chi^2_m$ sont indépendantes, alors

$$X - Y \sim \chi^2_{n-m} \ (n > m)$$

Approximation par une loi normale : A mesure que ν augmente, la loi du χ^2 tend vers la loi normale.

Utilisation de la table de Pearson :
Table 7 donne la la fonction de répartition $F(\chi^2) = P(X \le \chi^2)$, c.a.d. la valeur de χ^2 ayant la probabilité P d'être dépassée.
Soit la relation $F(u) = P(\chi^2_\nu < u) = p$. La table 5 donne, pour un certain nombre de valeurs p, u en fonction de ν.

— **La loi “t - de Student “$T \sim T_n$:** La loi de Student (ou loi de Student-Fisher) découverte par le statisticien anglais William Gosset qui travaillait comme conseiller à la brasserie Guinness. En 1908 il publie, sous le pseudonyme Student, une étude portant sur cette variable aléatoire. La loi de Student est utilisée dans les tests de comparaison de paramètres comme la moyenne et dans l'estimation de paramètres de la population à partir de données sur un échantillon (Test de Student).

Définition : Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite et Y une variable aléatoire suivant une loi de "Khi-deux" à n degrés de liberté : $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \sim \chi^2_n$. X et Y étant indépendantes, on dit que la variable aléatoire T_n définie par

$$T_n = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} = \frac{X\sqrt{n}}{\sqrt{Y}}$$

admet une distribution de "Student" à n degrés de liberté.

Densité de probabilité :
La fonction densité de probabilité $f(t)$ d'une variable $T \sim T_n$ a pour expression

$$f(t) : t \to C(n)\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}$$

où $C(n)$ est une constante positive dépendant de n et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Forme de la distribution : en cloche, symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et un peut plus aplatie que la distribution normale centrée réduite. Admet pour mode : 0.

Paramètres descriptifs

$$E(T_n) = 0 \quad \text{si} \quad n > 1; \quad Var(T_n) = \frac{n}{n-2} \quad \text{si} \quad n > 2$$

Approximation par la loi normale : En pratique : si $T \sim T_n$ pour $n \geq 30$, on pourra écrire que $T \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Utilisation de la table de Student : La Table 9 donne la valeur $t_{\alpha,n}$ définie par $P(|T| > t_{\alpha,n}) = \alpha$.
La Table 10. donne la valeurs de $t_{n,\alpha}$ de n degrés de liberté ayant la probabilité α d'être dépassée.
La table Table 11. permet d'obtenir u, pour certaines valeurs de p, selon le nombre de degrés de liberté de la variable de Student.

Test sur le chapitre : Fonctions de variables aléatoires

1. Loi de Khi deux, utilisation.

2. Loi de Student, utilisation.

10.2 Problèmes

Addition de variables aléatoires indépendantes

102. Si deux v.a, indépendantes X_1 et X_2 ont pour moyennes respectives $\mu_1 = 4$ et $\mu_2 = 6$ et pour variances respectives $\sigma_1^2 = 9$ et $\sigma_2^2 = 15$, calculer :
$E(X_1 + X_2)$ et $Var(X_1 + X_2)$; $E(4X_1 - 3X_2)$ et $Var(4X_1 - 3X_2)$.

103. Soit X_1 et X_2 deux v.a. indépendantes telles que $Var(X_1) = k$ et $Var(X_2) = 4$. Si on sait que $Var(3X_1 - X_2) = 25$, déterminer k.

104. Soit X_1 et X_2 deux v.a. indépendantes et $X_1 \sim \mathcal{B}(4; 0,5)$ et $X_2 \sim \mathcal{B}(3; 0,5)$. $Y = X_1 + X_2$. Déterminer $P(Y = 2)$; $P(Y < 2)$.

105. Soit X_1 et X_2 deux v.a. indépendantes et $X_1 \sim \mathcal{P}(2)$ et $X_2 \sim \mathcal{P}(3)$. $Y = X_1 + X_2$. Déterminer $P(Y = 2)$; $P(Y \leq 2)$; $P(Y > 4)$; $P(2 < Y \leq 5)$.

106. Les v.a. X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent toutes deux une loi normale : $X_1 \sim \mathcal{N}(12; 2)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(15; 3)$.
Déterminer les lois des v.a. $Y = X_1 + X_2$ et $Y = X_1 - X_2$.

107. Soit les v.a. $X_1 \sim \mathcal{N}(45; 4)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(45; 3)$, déterminer la loi de la v.a. $D = X_1 - X_2$.
Déterminer les probabilités $P(D > 5)$; $P(-4 \leq D \leq 4)$.
Déterminer les valeurs de x telles que $P(D \leq x) = 0,95$; $P(-x \leq D \leq x) = 0,95$.

FONCTION NON LINEAIRE DE VARIABLES ALEATOIRES

Loi du "Khi-deux"

108. Soit la v.a. $X \sim \chi_3^2$. Déterminer les valeurs de x de cette variable pour lesquelles :
$P(X > x) = 0,10$; $P(X > x) = 0,05$; $P(X > x) = 0,01$.

109. Soit la v.a. $X \sim \chi_6^2$. Déterminer les probabilités suivantes :
$P(X \leq 10,645)$; $P(X \leq 16,812)$; $P(X \geq 12,592)$; $P(10,645 \leq X \leq 12,592)$.

110. Soit la v.a. $X \sim \chi_\nu^2$. Trouver les valeurs critiques de χ_ν^2 pour lesquelles l'aire de l'extrémité droite de la distribution du χ_ν^2 vaut 0,05 lorsque : a/ $\nu = 15$; b/ $\nu = 21$; c/ $\nu = 27$.

111. Soit la v.a. $X \sim \chi_{10}^2$. Déterminer les quantiles d'ordre 0,90 ; 0,95 ; 0,99.

Loi "t-de Student

112. La v.a. X suit une loi de Student à 22 degrés de liberté. Déterminer les valeurs de t pour lesquelles : $P(X < t) = 0,10$; $P(X > t) = 0,05$; $P(X < t) = 0,95$; $P(X > t) = 0,025$; $P(-t < X < t) = 0,90$; $P(-t < X < t) = 0,95$; $P(-t < X < t) = 0,99$.

Chapitre 11

Exercieces de révision

113. La variable aléatoire $X =$ "montant de la cotisation annuelle des assurés" d'une compagnie d'assurances est normalement distribuée avec une moyenne $\mu = 500$€ et un écart-type $\sigma = 50$€.
a) Déterminer le coefficient de variation de X. Interpréter le.
b) Quelle est la probabilité qu'un contrat d'assurance, choisi au hasard, ait une cotisation annuelle inférieure à 440€ ?
c) Quelle est la probabilité qu'un contrat d'assurance, choisi au hasard, ait une cotisation annuelle supérieure à 560 € ?
d) Entre quelles valeurs autour de la moyenne se situe la cotisation des 95% des assurés ?
e) Sur les 3600 assurés de cette compagnie, combien auront une cotisation annuelle comprise entre 440€ et 560€ ?
f) 25% des contrats de cette compagnie, ont une cotisation annuelle inférieure ou égale à quelle valeur ?
g) Les 10% des contrats ayant des cotisations les plus élevées, ont une cotisation supérieure à quelle valeur ?
h) En supposant que l'écart-type reste inchangé, à quel montant moyen doit être fixée la cotisation de sorte que seulement 5% des assurés auront une cotisation annuelle supérieure à $564,08$€ ?

114. Le taux moyen de sinistres enregistrés par une compagnie d'assurances est de 2,5 sinistres par jour. La variable aléatoire $X =$ "nombre de sinistres en une journée" suit la loi de Poisson.
a) Représenter graphiquement la distribution de probabilité de X et sa fonction de répartition.
b) Quelle est la probabilité que cette compagnie n'enregistre aucun sinistre dans la journée ?
c) Quelle est la probabilité que cette compagnie enregistre plus de 3 sinistres par jour ?
d) Sur une période d'une année, quel est vraisemblablement le nombre de jours où la compagnie n'a enregistré aucun sinistre ?
e) Calculer la probabilité d'avoir un nombre de sinistres compris entre le taux moyen de sinistres plus ou moins un écart-type.

f) Quel est le nombre de sinistres par jour le plus probable et quelle est sa probabilité ?
g) Combient sont 50 % des sinistres enrégistrés dans la journée ?
h) Quel est le nombre de sinistres qui composent 95 % des enrégistrés par jour ?

115. La probabilité pour un automobiliste d'avoir un accident par mois est de l'ordre de 0.1%. Les accidents sont supposés indépendants. Si une compagnie d'assurance dispose de 2000 contrats,
a) Reconnaître la loi exacte de la variable aléatoire X = "nombre d'accidents par mois parmi les 2000 contrats".
b) Combien d'accidents en moyenne, cette compagnie peut-elle enregistrer au cours d'un mois donné ?
c) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucun accident un mois donné ? Moins de 2 accidents par mois ?
d) Par quelle loi discrète peut-on approcher la loi de X ? En déduire les valeurs approchées des probabilités précédentes.

116. Soit la variable aléatoire X = "nombre de personnes s'arrêtant à une station service en une période de 15 minutes". La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4+
$P(X = k)$	p_0	0,2	0,4	p_3	0,1

La probabilité pour qu'une personne s'arrêtant à la station service achète l'article A est égale à 0,4.
a) Soit $p_3 = 2p_0$. Compléter la distribution de probabilité de X et la représenter graphiquement.
b) Définir et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.
c) Déterminer la probabilité que la station service ait moins de trois clients dans la journée.
d) Calculer le nombre moyen de personnes s'arrêtant en 15 minutes, et l'écart-type.
e) Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de personnes achetant le produit A en une période de 15 minutes. Pour tout $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, trouver la loi de Y sachant que $X = i$.

117. Pour le stock d'un produit, soit X =' 'la quantité stockée au début d'une journée donnée", Y = "les entrées en stock au cours de la journée" et Z = "les sorties du stock". X, Y et Z sont des variables aléatoires supposées indépendantes distribuées, respectivement : $X \sim P(20)$, $Y \sim \mathcal{B}(30, 0, 60)$ et $Z \sim \mathcal{N}(25, 3)$.
a) Déterminer une valeur approchée de $P(X > 10)$: la probabilité d'avoir plus de 10 produits en stock au début de la journée.
b) Donner une valeur approchée de $P(Y \leq 15)$: la probabilité d'avoir au plus 15 produits à l'entrée de stock au cours d'une journée donnée. c) Soit $W = X + Y – Z$, la quantité restant en stock en fin de journée. Quelle est la loi approchée de W ? En déduire son espérance mathématique E(W) et sa variance $V(W)$.
d) Calculer la probabilité d'une rupture de stock.

118. La variable aléatoire X = "les demandes mensuelles d'un produit" d'une compagnie est

normalement distribuée. La probabilité, pour que la demande mensuelle soit inférieure à 105 unités est égale à 27,40% et la celle d'être supérieure à 169 unités -à 2,50% .
a) Déterminer la moyenne et l'écart-type de X.
b) Soit $Y =$ "la demande annuelle". Déterminer la loi de Y, son espérance mathématique et son écart-type ?
c) Si les coûts fixes annuels de production sont de 20250 €, le coût unitaire est de 25 € et le prix de vente du produit est de 40 €. Quelle est la probabilité que le seuil de rentabilité annuel soit atteint ?

Schémas

Événements

au moins	$\geq$	plus de	$>$
moins de	$<$	au plus	$\leq$

A et B incompatibles	$A \cap B = \emptyset$
A et B compatibles	$A \cap B \neq \emptyset$

Combinatoire

		sans répétition	avec répétition
A Arrangements	choix, ordre	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	$\bar{A}_n^p = n^p$
P Permutations	ordre	$P_n = n!$	$\bar{P}_p^{p_1 p_2 \dots p_n} = \frac{p!}{p_1! p_2! \dots p_n!}$
C Combinaisons	choix	$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$	$\bar{C}_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!p!}$

Probabilités

Loi de multiplication	
A et B indépendants	$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$
A et B dépendants	$P(A \cap B) = P(A) * P(B\|A)$
Loi d'addition	
A et B incompatibles	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
A et B compatibles	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Modèle d'urne

Types de tirages	**Ordre**	**Répétitions d'éléments**	**Dénombrement**
Successifs avec remise	ordonné	Un élément peut être tiré plusieurs fois	$\bar{A}_n^p = n^p$
Successifs sans remise		Un élément n'est tiré qu'une seule fois	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
Simultanés	sans ordre		$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Cas possibles lors des différents modes de tirages

Mode de tirage	**Non exhaustif**	**Exhaustif**
Successif avec remise	$\bar{A}_n^p = n^p$	$\bar{A}_n^n = n^n$
Successif sans remise	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	$A_n^n = P_n = n!$
Simultané	$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$	1

Urne contenant deux sortes de boules :

N_1 boules de type A ; N_2 de type B ; $N_1 + N_2 = N$, $p = \frac{N_1}{N}$

L'événement E_k = "prélever k boules du type A parmi les n tirées"

Probabilité de l'événement E_k :

	‘bf Successif avec remise	**Successif sans remise**	**Simultané**
Choix d'emplacements	$\bar{P}_n^{k,n-k} = C_n^k$	$\bar{P}_n^{k,n-k} = C_n^k$	—
Choix d'éléments	$p^k(1-p)^{n-k}$	$\frac{A_{N_1}^k A_{N_2}^{n-k}}{A_N^n}$	$\frac{C_{N_1}^k . C_{N_2}^{n-k}}{C_N^n}$
$P(E_k)$	$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	$\frac{C_{N_1}^k C_{N_2}^{n-k}}{C_N^n}$	$\frac{C_{N_1}^k C_{N_2}^{n-k}}{C_N^n}$

Urne $\mathscr{U}$ contenant N boules de k couleurs différentes

N_i le nombre de boules de la couleur i ;
$p_i = \frac{N_i}{N}$ proportion de boules de la couleur i dans l'urne ; $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$

Soient $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$
$A(n_1, \ldots, n_k)$ - l'événement de tirer n boules, dont exactement n_1 boules de la couleur 1, n_2 boules de la couleur 2,..., et n_k boules de la couleur k.

Probabilité de l'événement $A(n_1, \ldots, n_k)$:

	successif avec remise	successif sans remise	simultané
choix d'emplacements	$\bar{P}_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k}$	$\bar{P}_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k}$	——
choix d'éléments	$p_1^{n_1}.p_2^{n_2}\ldots p_k^{n_k}$	$\frac{A_{N_1}^{n_1} A_{N_2}^{n2} \ldots A_{N_k}^{n_k}}{A_N^n}$	$\frac{C_{N_1}^{n_1}.C_{N_2}^{n2} \ldots C^{n_k} N_k}{C_N^n}$
$P(A(n_1, n_2, \ldots, n_k))$	$\bar{P}_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} p_1^{n_1}.p_2^{n_2}\ldots p_k^{n_k}$	$\frac{C_{N_1}^{n_1} C_{N_2}^{n2} \ldots C_{N_k}^{n_k}}{C_N^n}$	$\frac{C_{N_1}^{n_1} C_{N_2}^{n2} \ldots C_{N_k}^{n_k}}{C_N^n}$

Choix de la loi discrete pour une variable aléatoire

Conditions d'application : 2 issues possibles de probabilité p pour le succès

Nombre de tirages n	Mode de tirage	Définition de la variable aléatoire X	Loi
n =1	———	Nombre de succès	Bernoulli $B(1,p)$
$n > 1$	avec remise	Nombre de succès parmi les n tirages	Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$
		Nombre de tirages pour le I succès	Géometrique $\mathcal{G}(p)$
		Nombre de succès dans l'intervalle t	Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda = p * t$
	sans remise	Nombre de succès parmi les n tirages	Hypergéometrique $\mathcal{H}(N,n,p)$

Lois usuelles discrètes

Dans une urne, il y a N boules parmi lesquelles M de couleur blanche, $p = \frac{M}{N}$ et $q = 1 - p$.

Loi de X	Ensemble des valeurs possibles de X / nombre de tirages	Probabilités des valeurs de X / Définition de X	Espérance de X	Variance de X
		Lois usuelles discrètes finies		
Uniforme $\mathcal{U}(N)$	$\{1, \ldots, N\}$/ 1 tirage	$P(X = k) = \frac{1}{N}$ nombre de succès	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{N^2-1}{12}$
Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$	$\{0, 1\}$/ 1 tirage	$P(X = 0) = q$ et $P(X = 1) = p$	p	pq
Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	$\{0, 1, \ldots, n\}$ n tirages, avec remise	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ k = nombre de succès parmi les n tirages	np	npq
Hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$	$[\max(0; n - N + M); \min(n; M)]$ n tirages, sans remise	$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \times \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ k = nombre de succès parmi les n tirages	np	$npq\frac{N-n}{N-1}$
		Lois usuelles discrètes infinies		
Loi de X	Ensemble des valeurs possibles de X / nombre de tirages	Probabilités des valeurs de X / Définition de X	Espérance de X	Variance de X
Géométrique $\mathcal{G}(p)$ ou $\mathcal{R}(1, p)$	$\mathbb{N}$ n tirages, avec remise	$P(X = k) = p\, q^{k-1}$ k = nombre de tirages pour le 1er succès	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Pascal $\mathcal{R}(r, p)$	$\{k \in \mathbb{N}; k \geq r\}$	$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$	$\frac{r}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$
Pascal sans remise $\mathcal{S}(N, r, p)$	$\{k \in \mathbb{N}; r \leq k \leq N - M + r\}$	$P(X = k) = \frac{\binom{M}{r-1} \times \binom{N-M}{k-r}}{\binom{N}{k-1}} \times \frac{M-r+1}{N-k+1}$	$r\,\frac{N+1}{M+1}$	$rq\,\frac{N(N+1)(M-r+1)}{(M+1)^2(M+2)}$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$, n tirages avec remise	$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ k = nombre de succès dans l'intervalle t	λ	λ
Binômiale négative $\mathcal{BN}(r, p)$	$\mathbb{N}$	$P(X = k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r q^k$	$\frac{rq}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$

Lois usuelles continues

Loi	Ensemble image V de X	Densité de probabilité $f(x)$	Fonction de répartition $F(X)$	Moyenne μ	Variance σ^2
Uniforme $\mathcal{U}[a;b]$	$[a;b]$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Laplace - Gauss $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$	$\mathbb{R}$	Table de $\mathcal{N}(0,1)$	Table de $\mathcal{N}(0,1)$	μ	σ^2
Normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$	$\mathbb{R}$	Table de $\mathcal{N}(0,1)$	Table de $\mathcal{N}(0,1)$	0	1
Khi-deux $\chi^2_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} X_i^2$	$\mathbb{R}$ $X \sim \mathbb{N}(0,1)$		Table de χ^2_ν	ν	2ν
Student $T_n = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ $Y \sim \chi^2_n$	$\mathbb{R}$		Table de T_n	0	$\frac{n}{n-2}$

Additivité

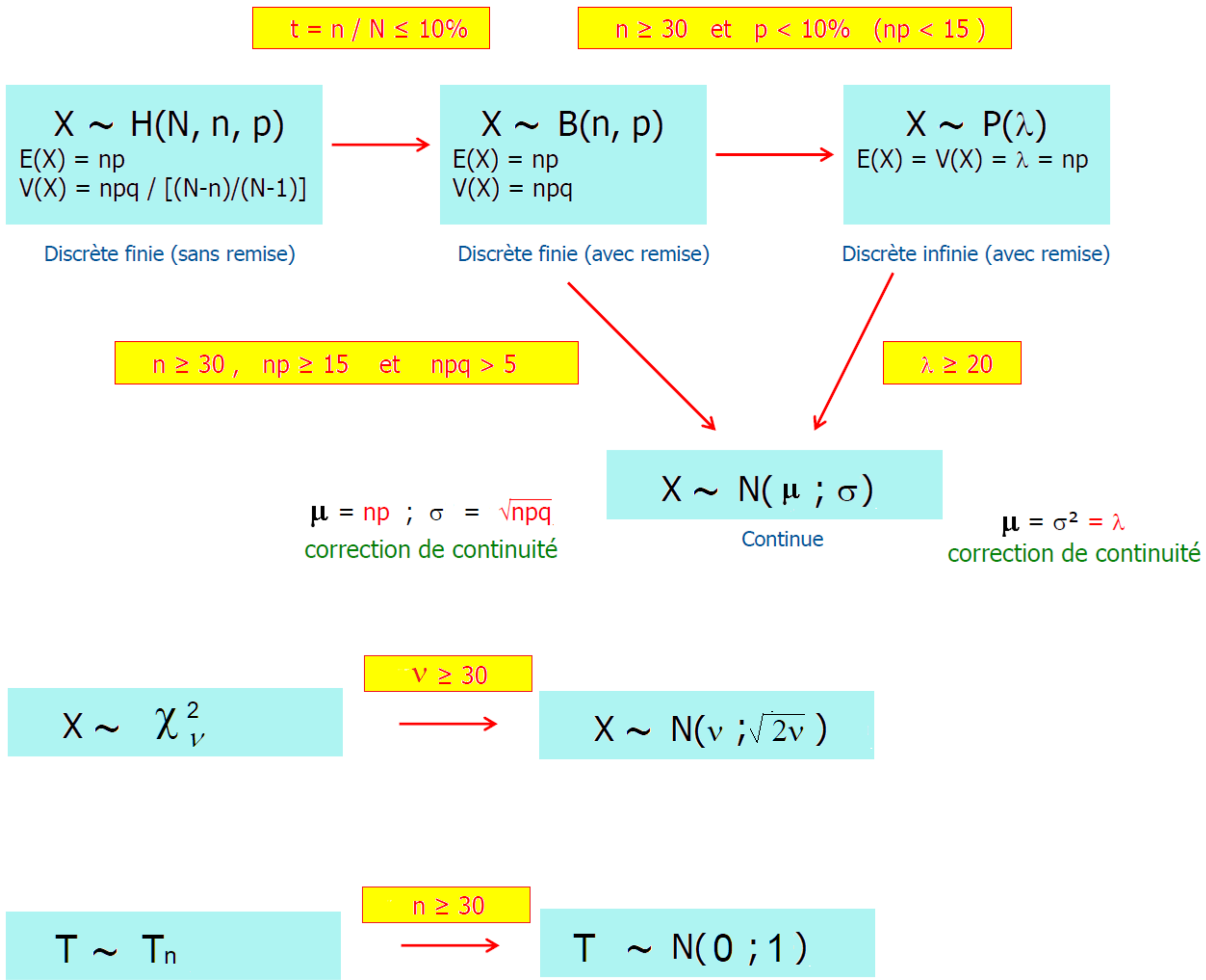
$X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $Y \sim \mathcal{B}(n',p)$, indépendantes $\to X+Y \sim \mathcal{B}(n+n',p)$.

$X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$, $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$, indépendantes $\to X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2)$.

$X \sim \mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1)$, $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2)$, indépendantes, $a,b \in \mathbb{R} \to \ aX \pm bY \sim \mathcal{N}(a\mu_1 \pm b\mu_2, \sqrt{a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2})$.

$X \sim \chi^2_n$, $Y \sim \chi^2_m$, indépendantes $\to X \pm Y \sim \chi^2_{n\pm+m}$ $(n > m)$.

Convergence en loi



Bibliographie

[1] Anderson, Sweeney et Williams. *Statistiques pour l'économie et la gestion*, 2015, De Boeck, Bruxelles

[2] Banks, J., et Meikes, R.G. *Handbook of Tables and Graphs for the Industrial Engineer and Manager*, 1984, Upper Saddle River, NJ, Prentice-Hall.

[3] B. Belletante, B. Romier *Mathématiques et gestion. Lest outils fondamentaux.* Ellipses, Paris, 1991.

[4] Berrondo-Agrell Marie et Fourastie Jacqueline. *Pour comprendre les probabilités*, 1994, Paris, Hachette, "Les Fondamentaux".

[5] Burington, R.S., et May, D.C. *Handbook of Probability and Statistics with Tables*, 1970. 2e éd., New York, McGraw-Hill Book Company.

[6] Calot G. *Cours de calcul de probabilités*, 1989, Dunod, Paris

[7] Giard V. *Statistique appliquée à la gestion*, 1995, Economica, Paris.

[8] Delsart V. et Vaneecloo N. *Probabilités, variables aléatoires, lois classiques*, 2010 PU du Septemtrion, Lille.

[9] Droesbeke J-J. *Éléments de statistique*, 1997, Ellipses , Bruxelles.

[10] Dumoulin D. *Mathématiques de gestion. Cours et applications.* Economica, Paris, 1987.

[11] Grais B. *La statistique et l'intreprise. Les techniques statistiques, tome 2 : Les instruments d'analyse.* Economica, Paris, 1987.

[12] Hoel P. *Statistique mathématique.* Armand Colin, Paris, 1984.

[13] Jaffard P. *Initiation aux meéthodes de la statistique et du calcul des probabilités.* Masson, Paris, 1990.

[14] Justens D. *Statistique pour décideurs*, 1990, De Boeck, Bruxelles.

[15] Lecoutre J.-P. *Statistique et probabilités*, 2000, Dunod, Paris.

[16] Lipschitz, Seymour. *Probabilité. Cours et problèmes*, 1993, Paris, éditions McGraw-Hill, série Schaum.

[17] Micula S. *Probability and statistics for computational sciences.* Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2009.

[18] Ross M. *Initiation aux Probabilités*, 1988, Presses Polytechniques et Universitaires romandes.

[19] Saporta, Gilbert. *Probabilité, analyse des données et statistique*, 2006, Paris, éditions Technip.

[20] Spiegel, Murray R. *Probabilité et statistique. Cours et problèmes*, 1981, Paris, éditions McGraw-Hill, série Schaum.

[21] Vekermans D. *Probabilité et statistique.* `http://vekemans.free.fr/Proba.pdf`

[22] Wonnacott, Thomas H. et Wonnacott, Ronald J. *Statistique*, 1991, éditions Econimica.

Annexe

Tables statistiques

1. Table 1. Distribution de la loi binomiale [5]

2. Table 2. Fonction de répartition binomiale [2]

3. Table 3. Distribution de Poisson [5]

4. Table 4. Fonction de répartition de la loi de Poisson [2]

5. Table 5. Densité de probabilité de la loi normale centrée réduite

6. Table 6. Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

7. Table 6'. Fractiles de la loi normale centrée réduite

8. Table 7. Distribution de χ^2 (Loi de K. Pearson). Valeurs de χ^2 ayant la probabilité P d'être dépassée.

9. Table 8. Fonction de répartition de la loi de χ^2

10. Table 9. Distribution T_n (Loi de Student) : valeurs de T_n ayant la probabilité α d'être dépassée en valeur absolue

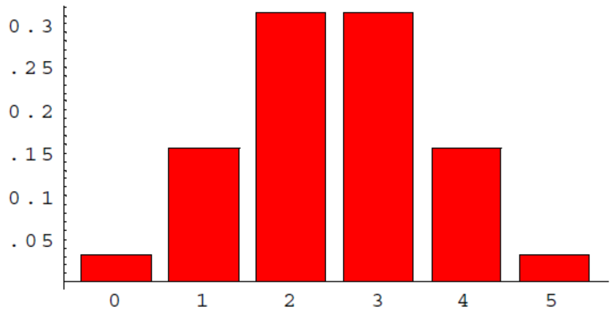
11. Table 10. Distribution T_n (Loi de Student) : valeurs de T_n ayant la probabilité d'être dépassée

12. Table 11. Fonction de répartition de la loi de Student T_n

Table 1. Distribution binomiale

Cette table donne la probabilité d'obtenir k succès en n tirages étant donné une probabilité p de succès sur un tirage.
Exemple : la probabilité d'obtenir 1 succès sur 5 tirages à pile ou face est de 0,1563.

$$P(X = k) = C_n^k \, p^k \, (1-p)^{n-k}$$



n	k	p = 0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
1	0	0.9500	0.9000	0.8500	0.8000	0.7500	0.7000	0.6500	0.6000	0.5500	0.5000
	1	0.0500	0.1000	0.1500	0.2000	0.2500	0.3000	0.3500	0.4000	0.4500	0.5000
2	0	0.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500
	1	0.0950	0.1800	0.2550	0.3200	0.3750	0.4200	0.4550	0.4800	0.4950	0.5000
	2	0.0025	0.0100	0.0225	0.0400	0.0625	0.0900	0.1225	0.1600	0.2025	0.2500
3	0	0.8574	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250
	1	0.1354	0.2430	0.3251	0.3840	0.4219	0.4410	0.4436	0.4320	0.4084	0.3750
	2	0.0071	0.0270	0.0574	0.0960	0.1406	0.1890	0.2389	0.2880	0.3341	0.3750
	3	0.0001	0.0010	0.0034	0.0080	0.0156	0.0270	0.0429	0.0640	0.0911	0.1250
4	0	0.8145	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625
	1	0.1715	0.2916	0.3685	0.4096	0.4219	0.4116	0.3845	0.3456	0.2995	0.2500
	2	0.0135	0.0486	0.0975	0.1536	0.2109	0.2646	0.3105	0.3456	0.3675	0.3750
	3	0.0005	0.0036	0.0115	0.0256	0.0469	0.0756	0.1115	0.1536	0.2005	0.2500
	4	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016	0.0039	0.0081	0.0150	0.0256	0.0410	0.0625
5	0	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313
	1	0.2036	0.3281	0.3915	0.4096	0.3955	0.3602	0.3124	0.2592	0.2059	0.1563
	2	0.0214	0.0729	0.1382	0.2048	0.2637	0.3087	0.3364	0.3456	0.3369	0.3125
	3	0.0011	0.0081	0.0244	0.0512	0.0879	0.1323	0.1811	0.2304	0.2757	0.3125
	4	0.0000	0.0005	0.0022	0.0064	0.0146	0.0284	0.0488	0.0768	0.1128	0.1563
	5	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0024	0.0053	0.0102	0.0185	0.0313
6	0	0.7351	0.5314	0.3771	0.2621	0.1780	0.1176	0.0754	0.0467	0.0277	0.0156
	1	0.2321	0.3543	0.3993	0.3932	0.3560	0.3025	0.2437	0.1866	0.1359	0.0938
	2	0.0305	0.0984	0.1762	0.2458	0.2966	0.3241	0.3280	0.3110	0.2780	0.2344
	3	0.0021	0.0146	0.0415	0.0819	0.1318	0.1852	0.2355	0.2765	0.3032	0.3125
	4	0.0001	0.0012	0.0055	0.0154	0.0330	0.0595	0.0951	0.1382	0.1861	0.2344
	5	0.0000	0.0001	0.0004	0.0015	0.0044	0.0102	0.0205	0.0369	0.0609	0.0938
	6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0018	0.0041	0.0083	0.0156
7	0	0.6983	0.4783	0.3206	0.2097	0.1335	0.0824	0.0490	0.0280	0.0152	0.0078
	1	0.2573	0.3720	0.3960	0.3670	0.3115	0.2471	0.1848	0.1306	0.0872	0.0547
	2	0.0406	0.1240	0.2097	0.2753	0.3115	0.3177	0.2985	0.2613	0.2140	0.1641
	3	0.0036	0.0230	0.0617	0.1147	0.1730	0.2269	0.2679	0.2903	0.2918	0.2734
	4	0.0002	0.0026	0.0109	0.0287	0.0577	0.0972	0.1442	0.1935	0.2388	0.2734
	5	0.0000	0.0002	0.0012	0.0043	0.0115	0.0250	0.0466	0.0774	0.1172	0.1641
	6	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0013	0.0036	0.0084	0.0172	0.0320	0.0547
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0006	0.0016	0.0037	0.0078
8	0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039
	1	0.2793	0.3826	0.3847	0.3355	0.2670	0.1977	0.1373	0.0896	0.0548	0.0313
	2	0.0515	0.1488	0.2376	0.2936	0.3115	0.2965	0.2587	0.2090	0.1569	0.1094
	3	0.0054	0.0331	0.0839	0.1468	0.2076	0.2541	0.2786	0.2787	0.2568	0.2188
	4	0.0004	0.0046	0.0185	0.0459	0.0865	0.1361	0.1875	0.2322	0.2627	0.2734
	5	0.0000	0.0004	0.0026	0.0092	0.0231	0.0467	0.0808	0.1239	0.1719	0.2188
	6	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0038	0.0100	0.0217	0.0413	0.0703	0.1094
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0012	0.0033	0.0079	0.0164	0.0313
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0017	0.0039

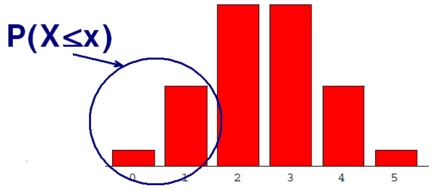
n	k	p = 0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
9	0	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020
	1	0.2985	0.3874	0.3679	0.3020	0.2253	0.1556	0.1004	0.0605	0.0339	0.0176
	2	0.0629	0.1722	0.2597	0.3020	0.3003	0.2668	0.2162	0.1612	0.1110	0.0703
	3	0.0077	0.0446	0.1069	0.1762	0.2336	0.2668	0.2716	0.2508	0.2119	0.1641
	4	0.0006	0.0074	0.0283	0.0661	0.1168	0.1715	0.2194	0.2508	0.2600	0.2461
	5	0.0000	0.0008	0.0050	0.0165	0.0389	0.0735	0.1181	0.1672	0.2128	0.2461
	6	0.0000	0.0001	0.0006	0.0028	0.0087	0.0210	0.0424	0.0743	0.1160	0.1641
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0039	0.0098	0.0212	0.0407	0.0703
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0013	0.0035	0.0083	0.0176
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0020
10	0	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010
	1	0.3151	0.3874	0.3474	0.2684	0.1877	0.1211	0.0725	0.0403	0.0207	0.0098
	2	0.0746	0.1937	0.2759	0.3020	0.2816	0.2335	0.1757	0.1209	0.0763	0.0439
	3	0.0105	0.0574	0.1298	0.2013	0.2503	0.2668	0.2522	0.2150	0.1665	0.1172
	4	0.0010	0.0112	0.0401	0.0881	0.1460	0.2001	0.2377	0.2508	0.2384	0.2051
	5	0.0001	0.0015	0.0085	0.0264	0.0584	0.1029	0.1536	0.2007	0.2340	0.2461
	6	0.0000	0.0001	0.0012	0.0055	0.0162	0.0368	0.0689	0.1115	0.1596	0.2051
	7	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0031	0.0090	0.0212	0.0425	0.0746	0.1172
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0014	0.0043	0.0106	0.0229	0.0439
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016	0.0042	0.0098
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010
11	0	0.5688	0.3138	0.1673	0.0859	0.0422	0.0198	0.0088	0.0036	0.0014	0.0005
	1	0.3293	0.3835	0.3248	0.2362	0.1549	0.0932	0.0518	0.0266	0.0125	0.0054
	2	0.0867	0.2131	0.2866	0.2953	0.2581	0.1998	0.1395	0.0887	0.0513	0.0269
	3	0.0137	0.0710	0.1517	0.2215	0.2581	0.2568	0.2254	0.1774	0.1259	0.0806
	4	0.0014	0.0158	0.0536	0.1107	0.1721	0.2201	0.2428	0.2365	0.2060	0.1611
	5	0.0001	0.0025	0.0132	0.0388	0.0803	0.1321	0.1830	0.2207	0.2360	0.2256
	6	0.0000	0.0003	0.0023	0.0097	0.0268	0.0566	0.0985	0.1471	0.1931	0.2256
	7	0.0000	0.0000	0.0003	0.0017	0.0064	0.0173	0.0379	0.0701	0.1128	0.1611
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0037	0.0102	0.0234	0.0462	0.0806
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0018	0.0052	0.0126	0.0269
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0007	0.0021	0.0054
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0005
12	0	0.5404	0.2824	0.1422	0.0687	0.0317	0.0138	0.0057	0.0022	0.0008	0.0002
	1	0.3413	0.3766	0.3012	0.2062	0.1267	0.0712	0.0368	0.0174	0.0075	0.0029
	2	0.0988	0.2301	0.2924	0.2835	0.2323	0.1678	0.1088	0.0639	0.0339	0.0161
	3	0.0173	0.0852	0.1720	0.2362	0.2581	0.2397	0.1954	0.1419	0.0923	0.0537
	4	0.0021	0.0213	0.0683	0.1329	0.1936	0.2311	0.2367	0.2128	0.1700	0.1208
	5	0.0002	0.0038	0.0193	0.0532	0.1032	0.1585	0.2039	0.2270	0.2225	0.1934
	6	0.0000	0.0005	0.0040	0.0155	0.0401	0.0792	0.1281	0.1766	0.2124	0.2256
	7	0.0000	0.0000	0.0006	0.0033	0.0115	0.0291	0.0591	0.1009	0.1489	0.1934
	8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0024	0.0078	0.0199	0.0420	0.0762	0.1208
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0015	0.0048	0.0125	0.0277	0.0537
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0008	0.0025	0.0068	0.0161
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0029
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002
13	0	0.5133	0.2542	0.1209	0.0550	0.0238	0.0097	0.0037	0.0013	0.0004	0.0001
	1	0.3512	0.3672	0.2774	0.1787	0.1029	0.0540	0.0259	0.0113	0.0045	0.0016
	2	0.1109	0.2448	0.2937	0.2680	0.2059	0.1388	0.0836	0.0453	0.0220	0.0095
	3	0.0214	0.0997	0.1900	0.2457	0.2517	0.2181	0.1651	0.1107	0.0660	0.0349
	4	0.0028	0.0277	0.0838	0.1535	0.2097	0.2337	0.2222	0.1845	0.1350	0.0873
	5	0.0003	0.0055	0.0266	0.0691	0.1258	0.1803	0.2154	0.2214	0.1989	0.1571
	6	0.0000	0.0008	0.0063	0.0230	0.0559	0.1030	0.1546	0.1968	0.2169	0.2095
	7	0.0000	0.0001	0.0011	0.0058	0.0186	0.0442	0.0833	0.1312	0.1775	0.2095
	8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0011	0.0047	0.0142	0.0336	0.0656	0.1089	0.1571
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0009	0.0034	0.0101	0.0243	0.0495	0.0873
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0022	0.0065	0.0162	0.0349
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0012	0.0036	0.0095
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

					p						
n	**k**	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
14	0	0.4877	0.2288	0.1028	0.0440	0.0178	0.0068	0.0024	0.0008	0.0002	0.0001
	1	0.3593	0.3559	0.2539	0.1539	0.0832	0.0407	0.0181	0.0073	0.0027	0.0009
	2	0.1229	0.2570	0.2912	0.2501	0.1802	0.1134	0.0634	0.0317	0.0141	0.0056
	3	0.0259	0.1142	0.2056	0.2501	0.2402	0.1943	0.1366	0.0845	0.0462	0.0222
	4	0.0037	0.0349	0.0998	0.1720	0.2202	0.2290	0.2022	0.1549	0.1040	0.0611
	5	0.0004	0.0078	0.0352	0.0860	0.1468	0.1963	0.2178	0.2066	0.1701	0.1222
	6	0.0000	0.0013	0.0093	0.0322	0.0734	0.1262	0.1759	0.2066	0.2088	0.1833
	7	0.0000	0.0002	0.0019	0.0092	0.0280	0.0618	0.1082	0.1574	0.1952	0.2095
	8	0.0000	0.0000	0.0003	0.0020	0.0082	0.0232	0.0510	0.0918	0.1398	0.1833
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0018	0.0066	0.0183	0.0408	0.0762	0.1222
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0014	0.0049	0.0136	0.0312	0.0611
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0010	0.0033	0.0093	0.0222
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0019	0.0056
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0009
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
15	0	0.4633	0.2059	0.0874	0.0352	0.0134	0.0047	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000
	1	0.3658	0.3432	0.2312	0.1319	0.0668	0.0305	0.0126	0.0047	0.0016	0.0005
	2	0.1348	0.2669	0.2856	0.2309	0.1559	0.0916	0.0476	0.0219	0.0090	0.0032
	3	0.0307	0.1285	0.2184	0.2501	0.2252	0.1700	0.1110	0.0634	0.0318	0.0139
	4	0.0049	0.0428	0.1156	0.1876	0.2252	0.2186	0.1792	0.1268	0.0780	0.0417
	5	0.0006	0.0105	0.0449	0.1032	0.1651	0.2061	0.2123	0.1859	0.1404	0.0916
	6	0.0000	0.0019	0.0132	0.0430	0.0917	0.1472	0.1906	0.2066	0.1914	0.1527
	7	0.0000	0.0003	0.0030	0.0138	0.0393	0.0811	0.1319	0.1771	0.2013	0.1964
	8	0.0000	0.0000	0.0005	0.0035	0.0131	0.0348	0.0710	0.1181	0.1647	0.1964
	9	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0034	0.0116	0.0298	0.0612	0.1048	0.1527
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0030	0.0096	0.0245	0.0515	0.0916
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0024	0.0074	0.0191	0.0417
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0016	0.0052	0.0139
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0032
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
16	0	0.4401	0.1853	0.0743	0.0281	0.0100	0.0033	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000
	1	0.3706	0.3294	0.2097	0.1126	0.0535	0.0228	0.0087	0.0030	0.0009	0.0002
	2	0.1463	0.2745	0.2775	0.2111	0.1336	0.0732	0.0353	0.0150	0.0056	0.0018
	3	0.0359	0.1423	0.2285	0.2463	0.2079	0.1465	0.0888	0.0468	0.0215	0.0085
	4	0.0061	0.0514	0.1311	0.2001	0.2252	0.2040	0.1553	0.1014	0.0572	0.0278
	5	0.0008	0.0137	0.0555	0.1201	0.1802	0.2099	0.2008	0.1623	0.1123	0.0667
	6	0.0001	0.0028	0.0180	0.0550	0.1101	0.1649	0.1982	0.1983	0.1684	0.1222
	7	0.0000	0.0004	0.0045	0.0197	0.0524	0.1010	0.1524	0.1889	0.1969	0.1746
	8	0.0000	0.0001	0.0009	0.0055	0.0197	0.0487	0.0923	0.1417	0.1812	0.1964
	9	0.0000	0.0000	0.0001	0.0012	0.0058	0.0185	0.0442	0.0840	0.1318	0.1746
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0014	0.0056	0.0167	0.0392	0.0755	0.1222
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0013	0.0049	0.0142	0.0337	0.0667
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0040	0.0115	0.0278
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0008	0.0029	0.0085
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0018
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
17	0	0.4181	0.1668	0.0631	0.0225	0.0075	0.0023	0.0007	0.0002	0.0000	0.0000
	1	0.3741	0.3150	0.1893	0.0957	0.0426	0.0169	0.0060	0.0019	0.0005	0.0001
	2	0.1575	0.2800	0.2673	0.1914	0.1136	0.0581	0.0260	0.0102	0.0035	0.0010
	3	0.0415	0.1556	0.2359	0.2393	0.1893	0.1245	0.0701	0.0341	0.0144	0.0052
	4	0.0076	0.0605	0.1457	0.2093	0.2209	0.1868	0.1320	0.0796	0.0411	0.0182
	5	0.0010	0.0175	0.0668	0.1361	0.1914	0.2081	0.1849	0.1379	0.0875	0.0472
	6	0.0001	0.0039	0.0236	0.0680	0.1276	0.1784	0.1991	0.1839	0.1432	0.0944
	7	0.0000	0.0007	0.0065	0.0267	0.0668	0.1201	0.1685	0.1927	0.1841	0.1484
	8	0.0000	0.0001	0.0014	0.0084	0.0279	0.0644	0.1134	0.1606	0.1883	0.1855
	9	0.0000	0.0000	0.0003	0.0021	0.0093	0.0276	0.0611	0.1070	0.1540	0.1855
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004	0.0025	0.0095	0.0263	0.0571	0.1008	0.1484
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0026	0.0090	0.0242	0.0525	0.0944
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0024	0.0081	0.0215	0.0472
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0021	0.0068	0.0182
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0016	0.0052

		p									
n	**k**	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
17	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
	17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
18	0	0.3972	0.1501	0.0536	0.0180	0.0056	0.0016	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.3763	0.3002	0.1704	0.0811	0.0338	0.0126	0.0042	0.0012	0.0003	0.0001
	2	0.1683	0.2835	0.2556	0.1723	0.0958	0.0458	0.0190	0.0069	0.0022	0.0006
	3	0.0473	0.1680	0.2406	0.2297	0.1704	0.1046	0.0547	0.0246	0.0095	0.0031
	4	0.0093	0.0700	0.1592	0.2153	0.2130	0.1681	0.1104	0.0614	0.0291	0.0117
	5	0.0014	0.0218	0.0787	0.1507	0.1988	0.2017	0.1664	0.1146	0.0666	0.0327
	6	0.0002	0.0052	0.0301	0.0816	0.1436	0.1873	0.1941	0.1655	0.1181	0.0708
	7	0.0000	0.0010	0.0091	0.0350	0.0820	0.1376	0.1792	0.1892	0.1657	0.1214
	8	0.0000	0.0002	0.0022	0.0120	0.0376	0.0811	0.1327	0.1734	0.1864	0.1669
	9	0.0000	0.0000	0.0004	0.0033	0.0139	0.0386	0.0794	0.1284	0.1694	0.1855
	10	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0042	0.0149	0.0385	0.0771	0.1248	0.1669
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0010	0.0046	0.0151	0.0374	0.0742	0.1214
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0012	0.0047	0.0145	0.0354	0.0708
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0012	0.0045	0.0134	0.0327
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0039	0.0117
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0009	0.0031
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006
	17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
	18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
19	0	0.3774	0.1351	0.0456	0.0144	0.0042	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.3774	0.2852	0.1529	0.0685	0.0268	0.0093	0.0029	0.0008	0.0002	0.0000
	2	0.1787	0.2852	0.2428	0.1540	0.0803	0.0358	0.0138	0.0046	0.0013	0.0003
	3	0.0533	0.1796	0.2428	0.2182	0.1517	0.0869	0.0422	0.0175	0.0062	0.0018
	4	0.0112	0.0798	0.1714	0.2182	0.2023	0.1491	0.0909	0.0467	0.0203	0.0074
	5	0.0018	0.0266	0.0907	0.1636	0.2023	0.1916	0.1468	0.0933	0.0497	0.0222
	6	0.0002	0.0069	0.0374	0.0955	0.1574	0.1916	0.1844	0.1451	0.0949	0.0518
	7	0.0000	0.0014	0.0122	0.0443	0.0974	0.1525	0.1844	0.1797	0.1443	0.0961
	8	0.0000	0.0002	0.0032	0.0166	0.0487	0.0981	0.1489	0.1797	0.1771	0.1442
	9	0.0000	0.0000	0.0007	0.0051	0.0198	0.0514	0.0980	0.1464	0.1771	0.1762
	10	0.0000	0.0000	0.0001	0.0013	0.0066	0.0220	0.0528	0.0976	0.1449	0.1762
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0018	0.0077	0.0233	0.0532	0.0970	0.1442
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004	0.0022	0.0083	0.0237	0.0529	0.0961
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0024	0.0085	0.0233	0.0518
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0024	0.0082	0.0222
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0022	0.0074
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0018
	17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003
	18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
20	0	0.3585	0.1216	0.0388	0.0115	0.0032	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.3774	0.2702	0.1368	0.0576	0.0211	0.0068	0.0020	0.0005	0.0001	0.0000
	2	0.1887	0.2852	0.2293	0.1369	0.0669	0.0278	0.0100	0.0031	0.0008	0.0002
	3	0.0596	0.1901	0.2428	0.2054	0.1339	0.0716	0.0323	0.0123	0.0040	0.0011
	4	0.0133	0.0898	0.1821	0.2182	0.1897	0.1304	0.0738	0.0350	0.0139	0.0046
	5	0.0022	0.0319	0.1028	0.1746	0.2023	0.1789	0.1272	0.0746	0.0365	0.0148
	6	0.0003	0.0089	0.0454	0.1091	0.1686	0.1916	0.1712	0.1244	0.0746	0.0370
	7	0.0000	0.0020	0.0160	0.0545	0.1124	0.1643	0.1844	0.1659	0.1221	0.0739
	8	0.0000	0.0004	0.0046	0.0222	0.0609	0.1144	0.1614	0.1797	0.1623	0.1201
	9	0.0000	0.0001	0.0011	0.0074	0.0271	0.0654	0.1158	0.1597	0.1771	0.1602
	10	0.0000	0.0000	0.0002	0.0020	0.0099	0.0308	0.0686	0.1171	0.1593	0.1762
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0005	0.0030	0.0120	0.0336	0.0710	0.1185	0.1602
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0039	0.0136	0.0355	0.0727	0.1201
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0010	0.0045	0.0146	0.0366	0.0739
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0012	0.0049	0.0150	0.0370
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0013	0.0049	0.0148
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0013	0.0046
	17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011
	18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
	19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Table 2. Fonction de répartition binomiale

Fournit la probabilité $P(X \leq x)$ pour $X \sim \mathcal{B}(n,p)$



		p									
n	X	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
2	0	.903	.810	.772	.640	.563	.490	.423	.360	.303	.250
	1	.998	.990	.978	.960	.938	.910	.878	.840	.798	.750
3	0	.857	.729	.614	.512	.422	.343	.275	.216	.166	.125
	1	.993	.972	.939	.896	.844	.784	.718	.648	.575	.500
	2	1.000	.999	.997	.992	.984	.973	.957	.936	.909	.875
4	0	.815	.656	.522	.410	.316	.240	.179	.130	.092	.063
	1	.986	.948	.890	.819	.738	.652	.563	.475	.391	.313
	2	1.000	.996	.988	.973	.949	.916	.874	.821	.759	.687
	3		1.000	.999	.998	.996	.992	.985	.974	.959	.938
5	0	.774	.590	.444	.328	.237	.168	.116	.078	.050	.031
	1	.977	.919	.835	.737	.633	.528	.428	.337	.256	.188
	2	.999	.991	.973	.942	.896	.837	.765	.683	.593	.500
	3	1.000	1.000	.998	.993	.984	.969	.946	.913	.869	.813
	4			1.000	1.000	.999	.998	.995	.990	.982	.969
6	0	.735	.531	.377	.262	.178	.118	.075	.047	.028	.016
	1	.967	.886	.776	.655	.534	.420	.319	.233	.164	.109
	2	.998	.984	.953	.901	.831	.744	.647	.544	.442	.344
	3	1.000	.999	.994	.983	.962	.930	.883	.821	.745	.656
	4		1.000	1.000	.998	.995	.989	.978	.959	.931	.891
	5				1.000	1.000	.999	.998	.996	.992	.984
7	0	.698	.478	.321	.210	.133	.082	.049	.028	.015	.008
	1	.956	.850	.717	.577	.445	.329	.234	.159	.102	.063
	2	.996	.974	.926	.852	.756	.647	.532	.420	.316	.227
	3	1.000	.997	.988	.967	.929	.874	.800	.710	.608	.500
	4		1.000	.999	.995	.987	.971	.944	.904	.847	.773
	5			1.000	1.000	.999	.996	.991	.981	.964	.938
	6					1.000	1.000	.999	.998	.996	.992
8	0	.663	.430	.272	.168	.100	.058	.032	.017	.008	.004
	1	.943	.813	.657	.503	.367	.255	.169	.106	.063	.035
	2	.994	.962	.895	.797	.679	.552	.428	.315	.220	.145
	3	1.000	.995	.979	.944	.886	.806	.706	.594	.477	.363
	4		1.000	.997	.990	.973	.942	.894	.826	.740	.637
	5			1.000	.999	.996	.989	.975	.950	.912	.855
	6				1.000	1.000	.999	.996	.991	.982	.965
	7						1.000	1.000	.999	.998	.996
9	0	.630	.387	.232	.134	.075	.040	.021	.010	.005	.002
	1	.929	.775	.599	.436	.300	.196	.121	.071	.039	.020
	2	.992	.947	.859	.738	.601	.463	.337	.232	.150	.090
	3	.999	.992	.966	.914	.834	.730	.609	.483	.361	.254
	4	1.000	.999	.994	.980	.951	.901	.828	.733	.621	.500
	5		1.000	.999	.997	.990	.975	.946	.901	.834	.746
	6			1.000	1.000	.999	.996	.989	.975	.950	.910
	7					1.000	1.000	.999	.996	.991	.980
	8							1.000	1.000	.999	.998
10	0	.599	.349	.197	.107	.056	.028	.013	.006	.003	.001
	1	.914	.736	.544	.376	.244	.149	.086	.046	.023	.011
	2	.988	.930	.820	.678	.526	.383	.262	.167	.100	.055
	3	.999	.987	.950	.879	.776	.650	.514	.382	.266	.172
	4	1.000	.998	.990	.967	.922	.850	.751	.633	.504	.377
	5		1.000	.999	.994	.980	.953	.905	.834	.738	.623
	6			1.000	.999	.996	.989	.974	.945	.898	.828
	7				1.000	1.000	.998	.995	.988	.973	.945
	8						1.000	.999	.998	.995	.989
	9							1.000	1.000	1.000	.999

n	X	p = .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
11	0	.569	.314	.167	.086	.042	.020	.009	.004	.001	.000
	1	.898	.697	.492	.322	.197	.113	.061	.030	.014	.006
	2	.985	.910	.779	.617	.455	.313	.200	.119	.065	.033
	3	.998	.981	.931	.839	.713	.570	.426	.296	.191	.113
	4	1.000	.997	.984	.950	.885	.790	.668	.533	.397	.274
	5		1.000	.997	.988	.966	.922	.851	.753	.633	.500
	6			1.000	.998	.992	.978	.950	.901	.826	.726
	7				1.000	.999	.996	.988	.971	.939	.887
	8					1.000	.999	.998	.994	.985	.967
	9						1.000	1.000	.999	.998	.994
	10								1.000	1.000	1.000
12	0	.540	.282	.142	.069	.032	.014	.006	.002	.001	.000
	1	.882	.659	.443	.275	.158	.085	.042	.020	.008	.003
	2	.980	.889	.736	.558	.391	.253	.151	.083	.042	.019
	3	.998	.974	.908	.795	.649	.493	.347	.225	.134	.073
	4	1.000	.996	.976	.927	.842	.724	.583	.438	.304	.194
	5		.999	.995	.981	.946	.882	.787	.665	.527	.387
	6		1.000	.999	.996	.986	.961	.915	.842	.739	.613
	7			1.000	.999	.997	.991	.974	.943	.888	.806
	8				1.000	1.000	.998	.994	.985	.964	.927
	9						1.000	.999	.997	.992	.981
	10							1.000	1.000	.999	.997
	11									1.000	1.000
13	0	.513	.254	.121	.055	.024	.010	.004	.001	.000	.000
	1	.865	.621	.398	.234	.127	.064	.030	.013	.005	.002
	2	.975	.866	.692	.502	.333	.202	.113	.058	.027	.011
	3	.997	.966	.882	.747	.584	.421	.278	.169	.093	.046
	4	1.000	.994	.966	.901	.794	.654	.501	.353	.228	.133
	5		.999	.992	.970	.920	.835	.716	.574	.427	.291
	6		1.000	.999	.993	.976	.938	.871	.771	.644	.500
	7			1.000	.999	.994	.982	.954	.902	.821	.709
	8				1.000	.999	.996	.987	.968	.930	.867
	9					1.000	.999	.997	.992	.980	.954
	10						1.000	1.000	.999	.996	.989
	11								1.000	.999	.998
	12									1.000	1.000
14	0	.488	.229	.103	.044	.018	.007	.002	.001	.000	.000
	1	.847	.585	.357	.198	.101	.047	.021	.008	.003	.001
	2	.970	.842	.648	.448	.281	.161	.084	.040	.017	.006
	3	.996	.956	.853	.698	.521	.355	.220	.124	.063	.029
	4	1.000	.991	.953	.870	.742	.584	.423	.279	.167	.090
	5		.999	.988	.956	.888	.781	.641	.486	.337	.212
	6		1.000	.998	.988	.962	.907	.816	.692	.546	.395
	7			1.000	.998	.990	.969	.925	.850	.741	.605
	8				1.000	.998	.992	.976	.942	.881	.788
	9					1.000	.998	.994	.982	.957	.910
	10						1.000	.999	.996	.989	.971
	11							1.000	.999	.998	.994
	12								1.000	1.000	.999
	13										1.000

		p									
n	X	*.05*	*.10*	*.15*	*.20*	*.25*	*.30*	*.35*	*.40*	*.45*	*.50*
15	0	.463	.206	.087	.035	.013	.005	.002	.000	.000	.000
	1	.829	.549	.319	.167	.080	.035	.014	.005	.002	.000
	2	.964	.816	.604	.398	.236	.127	.062	.027	.011	.004
	3	.995	.944	.823	.648	.461	.297	.173	.091	.042	.018
	4	.999	.987	.938	.836	.686	.515	.352	.217	.120	.059
	5	1.000	.998	.983	.939	.852	.722	.564	.403	.261	.151
	6		1.000	.996	.982	.943	.869	.755	.610	.452	.304
	7			.999	.996	.983	.950	.887	.787	.654	.500
	8			1.000	.999	.996	.985	.958	.905	.818	.696
	9				1.000	.999	.996	.988	.966	.923	.849
	10					1.000	.999	.997	.991	.975	.941
	11						1.000	1.000	.998	.994	.982
	12								1.000	.999	.996
	13									1.000	1.000
16	0	.440	.185	.074	.028	.010	.003	.001	.000	.000	.000
	1	.811	.515	.284	.141	.063	.026	.010	.003	.001	.000
	2	.957	.789	.561	.352	.197	.099	.045	.018	.007	.002
	3	.993	.932	.790	.598	.405	.246	.134	.065	.028	.011
	4	.999	.983	.921	.798	.630	.450	.289	.167	.085	.038
	5	1.000	.997	.976	.918	.810	.660	.490	.329	.198	.105
	6		.999	.994	.973	.920	.825	.688	.527	.366	.227
	7		1.000	.999	.993	.973	.926	.841	.716	.563	.402
	8			1.000	.999	.993	.974	.933	.858	.744	.598
	9				1.000	.998	.993	.977	.942	.876	.773
	10					1.000	.998	.994	.981	.951	.895
	11						1.000	.999	.995	.985	.962
	12							1.000	.999	.997	.989
	13								1.000	.999	.998
	14									1.000	1.000
17	0	.418	.167	.063	.023	.008	.002	.001	.000	.000	.000
	1	.792	.482	.252	.118	.050	.019	.007	.002	.001	.000
	2	.950	.762	.520	.310	.164	.077	.033	.012	.004	.001
	3	.991	.917	.756	.549	.353	.202	.103	.046	.018	.006
	4	.999	.978	.901	.758	.574	.389	.235	.126	.060	.025
	5	1.000	.995	.968	.894	.765	.597	.420	.264	.147	.072
	6		.999	.992	.962	.893	.775	.619	.448	.290	.166
	7		1.000	.998	.989	.960	.895	.787	.641	.474	.315
	8			1.000	.997	.988	.960	.901	.801	.663	.500
	9				1.000	.997	.987	.962	.908	.817	.685
	10					.999	.997	.988	.965	.917	.834
	11					1.000	.999	.997	.989	.970	.928
	12						1.000	.999	.997	.991	.975
	13							1.000	1.000	.998	.994
	14									1.000	.999
	15										1.000

		p									
n	X	*.05*	*.10*	*.15*	*.20*	*.25*	*.30*	*.35*	*.40*	*.45*	*.50*
18	0	.397	.150	.054	.018	.006	.002	.000	.000	.000	.000
	1	.774	.450	.224	.099	.039	.014	.005	.001	.000	.000
	2	.942	.734	.480	.271	.135	.060	.024	.008	.003	.001
	3	.989	.902	.720	.501	.306	.165	.078	.033	.012	.004
	4	.998	.972	.879	.716	.519	.333	.189	.094	.041	.015
	5	1.000	.994	.958	.867	.717	.534	.355	.209	.108	.048
	6		.999	.988	.949	.861	.722	.549	.374	.226	.119
	7		1.000	.997	.984	.943	.859	.728	.563	.391	.240
	8			.999	.996	.981	.940	.861	.737	.578	.407
	9			1.000	.999	.995	.979	.940	.865	.747	.593
	10				1.000	.999	.994	.979	.942	.872	.760
	11					1.000	.999	.994	.980	.946	.881
	12						1.000	.999	.994	.982	.952
	13							1.000	.999	.995	.985
	14								1.000	.999	.996
	15									1.000	.999
	16										1.000
19	0	.377	.135	.046	.014	.004	.001	.000	.000	.000	.000
	1	.755	.420	.198	.083	.031	.010	.003	.001	.000	.000
	2	.933	.705	.441	.237	.111	.046	.017	.005	.002	.000
	3	.987	.885	.684	.455	.263	.133	.059	.023	.008	.002
	4	.998	.965	.856	.673	.465	.282	.150	.070	.028	.010
	5	1.000	.991	.946	.837	.668	.474	.297	.163	.078	.032
	6		.998	.984	.932	.825	.666	.481	.308	.173	.084
	7		1.000	.996	.977	.923	.818	.666	.488	.317	.180
	8			.999	.993	.971	.916	.815	.667	.494	.324
	9			1.000	.998	.991	.967	.913	.814	.671	.500
	10				1.000	.998	.989	.965	.912	.816	.676
	11					1.000	.997	.989	.965	.913	.820
	12						.999	.997	.988	.966	.916
	13						1.000	.999	.997	.989	.968
	14							1.000	.999	.997	.990
	15								1.000	.999	.998
	16									1.000	1.000
20	0	.358	.122	.039	.012	.003	.001	.000	.000	.000	.000
	1	.736	.392	.176	.069	.024	.008	.002	.001	.000	.000
	2	.925	.677	.405	.206	.091	.035	.012	.004	.001	.000
	3	.984	.867	.648	.411	.225	.107	.044	.016	.005	.001
	4	.997	.957	.830	.630	.415	.238	.118	.051	.019	.006
	5	1.000	.989	.933	.804	.617	.416	.245	.126	.055	.021
	6		.998	.978	.913	.786	.608	.417	.250	.130	.058
	7		1.000	.994	.968	.898	.772	.601	.416	.252	.132
	8			.999	.990	.959	.887	.762	.596	.414	.252
	9			1.000	.997	.986	.952	.878	.755	.591	.412
	10				.999	.996	.983	.947	.872	.751	.588
	11				1.000	.999	.995	.980	.943	.869	.748
	12					1.000	.999	.994	.979	.942	.868
	13						1.000	.998	.994	.979	.942
	14							1.000	.998	.994	.979
	15								1.000	.998	.994
	16									1.000	.999
	17										1.000

Table 3. Distribution de Poisson

Fournit la probabilité $P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ pour $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

x	λ = 0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679
1	0.0905	0.1637	0.2222	0.2681	0.3033	0.3293	0.3476	0.3595	0.3659	0.3679
2	0.0045	0.0164	0.0333	0.0536	0.0758	0.0988	0.1217	0.1438	0.1647	0.1839
3	0.0002	0.0011	0.0033	0.0072	0.0126	0.0198	0.0284	0.0383	0.0494	0.0613
4	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0016	0.0030	0.0050	0.0077	0.0111	0.0153
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004	0.0007	0.0012	0.0020	0.0031
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

x	λ = 1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	0.3329	0.3012	0.2725	0.2466	0.2231	0.2019	0.1827	0.1653	0.1496	0.1353
1	0.3662	0.3614	0.3543	0.3452	0.3347	0.3230	0.3106	0.2975	0.2842	0.2707
2	0.2014	0.2169	0.2303	0.2417	0.2510	0.2584	0.2640	0.2678	0.2700	0.2707
3	0.0738	0.0867	0.0998	0.1128	0.1255	0.1378	0.1496	0.1607	0.1710	0.1804
4	0.0203	0.0260	0.0324	0.0395	0.0471	0.0551	0.0636	0.0723	0.0812	0.0902
5	0.0045	0.0062	0.0084	0.0111	0.0141	0.0176	0.0216	0.0260	0.0309	0.0361
6	0.0008	0.0012	0.0018	0.0026	0.0035	0.0047	0.0061	0.0078	0.0098	0.0120
7	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0008	0.0011	0.0015	0.0020	0.0027	0.0034
8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0006	0.0009
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002

x	λ = 2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	0.1225	0.1108	0.1003	0.0907	0.0821	0.0743	0.0672	0.0608	0.0550	0.0498
1	0.2572	0.2438	0.2306	0.2177	0.2052	0.1931	0.1815	0.1703	0.1596	0.1494
2	0.2700	0.2681	0.2652	0.2613	0.2565	0.2510	0.2450	0.2384	0.2314	0.2240
3	0.1890	0.1966	0.2033	0.2090	0.2138	0.2176	0.2205	0.2225	0.2237	0.2240
4	0.0992	0.1082	0.1169	0.1254	0.1336	0.1414	0.1488	0.1557	0.1622	0.1680
5	0.0417	0.0476	0.0538	0.0602	0.0668	0.0735	0.0804	0.0872	0.0940	0.1008
6	0.0146	0.0174	0.0206	0.0241	0.0278	0.0319	0.0362	0.0407	0.0455	0.0540
7	0.0044	0.0055	0.0068	0.0083	0.0099	0.0118	0.0139	0.0163	0.0188	0.0216
8	0.0011	0.0015	0.0019	0.0025	0.0031	0.0038	0.0047	0.0057	0.0068	0.0081
9	0.0003	0.0004	0.0005	0.0007	0.0009	0.0011	0.0014	0.0018	0.0022	0.0027
10	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0008
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

x	λ = 3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
0	0.0450	0.0408	0.0369	0.0344	0.0302	0.0273	0.0247	0.0224	0.0202	0.0183
1	0.1397	0.1304	0.1217	0.1135	0.1057	0.0984	0.0915	0.0850	0.0789	0.0733
2	0.2165	0.2087	0.2008	0.1929	0.1850	0.1771	0.1692	0.1615	0.1539	0.1465
3	0.2237	0.2226	0.2209	0.2186	0.2158	0.2125	0.2087	0.2046	0.2001	0.1954
4	0.1734	0.1781	0.1823	0.1858	0.1888	0.1912	0.1931	0.1944	0.1951	0.1954

	λ									
x	**3.1**	**3.2**	**3.3**	**3.4**	**3.5**	**3.6**	**3.7**	**3.8**	**3.9**	**4.0**
5	0.1075	0.1140	0.1203	0.1264	0.1322	0.1377	0.1429	0.1477	0.1522	0.1563
6	0.0555	0.0608	0.0662	0.0716	0.0771	0.0826	0.0881	0.0936	0.0989	0.1042
7	0.0246	0.0278	0.0312	0.0348	0.0385	0.0425	0.0466	0.0508	0.0551	0.0595
8	0.0095	0.0111	0.0129	0.0148	0.0169	0.0191	0.0215	0.0241	0.0269	0.0298
9	0.0093	0.0040	0.0047	0.0056	0.0066	0.0076	0.0089	0.0102	0.0116	0.0132
10	0.0010	0.0013	0.0016	0.0019	0.0023	0.0028	0.0033	0.0039	0.0045	0.0053
11	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0009	0.0011	0.0013	0.0016	0.0019
12	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006
13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

	λ									
x	**4.1**	**4.2**	**4.3**	**4.4**	**4.5**	**4.6**	**4.7**	**4.8**	**4.9**	**5.0**
0	0.0166	0.0150	0.0136	0.0123	0.0111	0.0101	0.0091	0.0082	0.0074	0.0067
1	0.0679	0.0630	0.0583	0.0540	0.0500	0.0462	0.0427	0.0395	0.0365	0.0337
2	0.1393	0.1323	0.1254	0.1188	0.1125	0.1063	0.1005	0.0948	0.0894	0.0842
3	0.1904	0.1852	0.1798	0.1743	0.1687	0.1631	0.1574	0.1517	0.1460	0.1404
4	0.1951	0.1944	0.1933	0.1917	0.1898	0.1875	0.1849	0.1820	0.1789	0.1755
5	0.1600	0.1633	0.1662	0.1687	0.1708	0.1725	0.1738	0.1747	0.1753	0.1755
6	0.1093	0.1143	0.1191	0.1237	0.1281	0.1323	0.1362	0.1398	0.1432	0.1462
7	0.0640	0.0686	0.0732	0.0778	0.0824	0.0869	0.0914	0.0959	0.1002	0.1044
8	0.0328	0.0360	0.0393	0.0428	0.0463	0.0500	0.0537	0.0575	0.0614	0.0653
9	0.0150	0.0163	0.0188	0.0209	0.0232	0.0255	0.0280	0.0307	0.0334	0.0363
10	0.0061	0.0071	0.0081	0.0092	0.0104	0.0118	0.0132	0.0147	0.0164	0.0181
11	0.0023	0.0027	0.0032	0.0037	0.0043	0.0049	0.0056	0.0064	0.0073	0.0082
12	0.0008	0.0009	0.0011	0.0014	0.0016	0.0019	0.0022	0.0026	0.0030	0.0034
13	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.0011	0.0013
14	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002

	λ									
x	**5.1**	**5.2**	**5.3**	**5.4**	**5.5**	**5.6**	**5.7**	**5.8**	**5.9**	**6.0**
0	0.0061	0.0055	0.0050	0.0045	0.0041	0.0037	0.0033	0.0030	0.0027	0.0025
1	0.0311	0.0287	0.0265	0.0244	0.0225	0.0207	0.0191	0.0176	0.0162	0.0149
2	0.0793	0.0746	0.0701	0.0659	0.0618	0.0580	0.0544	0.0509	0.0477	0.0446
3	0.1348	0.1293	0.1239	0.1185	0.1133	0.1082	0.1033	0.0985	0.0938	0.0892
4	0.1719	0.1681	0.1641	0.1600	0.1558	0.1515	0.1472	0.1428	0.1383	0.1339
5	0.1753	0.1748	0.1740	0.1728	0.1714	0.1697	0.1678	0.1656	0.1632	0.1606
6	0.1490	0.1515	0.1537	0.1555	0.1571	0.1584	0.1594	0.1601	0.1605	0.1606
7	0.1086	0.1125	0.1163	0.1200	0.1234	0.1267	0.1298	0.1326	0.1353	0.1377
8	0.0692	0.0731	0.0771	0.0810	0.0849	0.0887	0.0925	0.0962	0.0998	0.1033
9	0.0392	0.0423	0.0454	0.0486	0.0519	0.0552	0.0586	0.0620	0.0654	0.0688
10	0.0200	0.0220	0.0241	0.0262	0.0285	0.0309	0.0334	0.0359	0.0386	0.0413
11	0.0093	0.0104	0.0116	0.0129	0.0143	0.0157	0.0173	0.0190	0.0207	0.0225
12	0.0039	0.0045	0.0051	0.0058	0.0065	0.0073	0.0082	0.0092	0.0102	0.0113
13	0.0015	0.0018	0.0021	0.0024	0.0028	0.0032	0.0036	0.0041	0.0046	0.0052
14	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.0011	0.0013	0.0015	0.0017	0.0019	0.0022
15	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009
16	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003
17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001

	λ									
x	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	7.0
0	0.0022	0.0020	0.0018	0.0017	0.0015	0.0014	0.0012	0.0011	0.0010	0.0009
1	0.0137	0.0126	0.0116	0.0106	0.0098	0.0090	0.0082	0.0076	0.0070	0.0064
2	0.0417	0.0390	0.0364	0.0340	0.0318	0.0296	0.0276	0.0258	0.0240	0.0223
3	0.0848	0.0806	0.0765	0.0726	0.0688	0.0652	0.0617	0.0584	0.0552	0.0521
4	0.1294	0.1249	0.1205	0.1162	0.1118	0.1076	0.1034	0.0992	0.0952	0.0912
5	0.1579	0.1549	0.1519	0.1487	0.1454	0.1420	0.1385	0.1349	0.1314	0.1277
6	0.1605	0.1601	0.1595	0.1586	0.1575	0.1562	0.1546	0.1529	0.1511	0.1490
7	0.1399	0.1418	0.1435	0.1450	0.1462	0.1472	0.1480	0.1486	0.1489	0.1490
8	0.1066	0.1099	0.1130	0.1160	0.1188	0.1215	0.1240	0.1263	0.1284	0.1304
9	0.0723	0.0757	0.0791	0.0825	0.0858	0.0891	0.0923	0.0954	0.0985	0.1014
10	0.0441	0.0469	0.0498	0.0528	0.0558	0.0588	0.0618	0.0649	0.0679	0.0710
11	0.0245	0.0265	0.0285	0.0307	0.0330	0.0353	0.0377	0.0401	0.0426	0.0452
12	0.0124	0.0137	0.0150	0.0164	0.0179	0.0194	0.0210	0.0227	0.0245	0.0264
13	0.0058	0.0065	0.0073	0.0081	0.0089	0.0098	0.0108	0.0119	0.0130	0.0142
14	0.0025	0.0029	0.0033	0.0037	0.0041	0.0046	0.0052	0.0058	0.0064	0.0071
15	0.0010	0.0012	0.0014	0.0016	0.0018	0.0020	0.0023	0.0026	0.0029	0.0033
16	0.0004	0.0005	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0010	0.0011	0.0013	0.0014
17	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0006
18	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002
19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001

	λ									
x	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.0
0	0.0008	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0003
1	0.0059	0.0054	0.0049	0.0045	0.0041	0.0038	0.0035	0.0032	0.0029	0.0027
2	0.0208	0.0194	0.0180	0.0167	0.0156	0.0145	0.0134	0.0125	0.0116	0.0107
3	0.0492	0.0464	0.0438	0.0413	0.0389	0.0366	0.0345	0.0324	0.0305	0.0286
4	0.0874	0.0836	0.0799	0.0764	0.0729	0.0696	0.0663	0.0632	0.0602	0.0573
5	0.1241	0.1204	0.1167	0.1130	0.1094	0.1057	0.1021	0.0986	0.0951	0.0916
6	0.1468	0.1445	0.1420	0.1394	0.1367	0.1339	0.1311	0.1282	0.1252	0.1221
7	0.1489	0.1486	0.1481	0.1474	0.1465	0.1454	0.1442	0.1428	0.1413	0.1396
8	0.1321	0.1337	0.1351	0.1363	0.1373	0.1382	0.1388	0.1392	0.1395	0.1396
9	0.1042	0.1070	0.1096	0.1121	0.1144	0.1167	0.1187	0.1207	0.1224	0.1241
10	0.0740	0.0770	0.0800	0.0829	0.0858	0.0887	0.0914	0.0941	0.0967	0.0993
11	0.0478	0.0504	0.0531	0.0558	0.0585	0.0613	0.0640	0.0667	0.0695	0.0722
12	0.0283	0.0303	0.0323	0.0344	0.0366	0.0388	0.0411	0.0434	0.0457	0.0481
13	0.0154	0.0168	0.0181	0.0196	0.0211	0.0227	0.0243	0.0260	0.0278	0.0296
14	0.0078	0.0086	0.0095	0.0104	0.0113	0.0123	0.0134	0.0145	0.0157	0.0169
15	0.0037	0.0041	0.0046	0.0051	0.0057	0.0062	0.0069	0.0075	0.0083	0.0090
16	0.0016	0.0019	0.0021	0.0024	0.0026	0.0030	0.0033	0.0037	0.0041	0.0045
17	0.0007	0.0008	0.0009	0.0010	0.0012	0.0013	0.0015	0.0017	0.0019	0.0021
18	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0006	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009
19	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0003	0.0004
20	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002
21	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001

	λ									
x	8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	9.0
0	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001
1	0.0025	0.0023	0.0021	0.0019	0.0017	0.0016	0.0014	0.0013	0.0012	0.0011
2	0.0100	0.0092	0.0086	0.0079	0.0074	0.0068	0.0063	0.0058	0.0054	0.0050
3	0.0269	0.0252	0.0237	0.0222	0.0208	0.0195	0.0183	0.0171	0.1060	0.0150
4	0.0544	0.0517	0.0491	0.0466	0.0443	0.0420	0.0398	0.0377	0.0357	0.0337

	λ									
x	**8.1**	**8.2**	**8.3**	**8.4**	**8.5**	**8.6**	**8.7**	**8.8**	**8.9**	**9.0**
5	0.0882	0.0849	0.0816	0.0784	0.0752	0.0722	0.0692	0.0663	0.0635	0.0607
6	0.1191	0.1160	0.1128	0.1097	0.1066	0.1034	0.1003	0.0972	0.0941	0.0911
7	0.1378	0.1358	0.1338	0.1317	0.1294	0.1271	0.1247	0.1222	0.1197	0.1171
8	0.1395	0.1392	0.1388	0.1382	0.1375	0.1366	0.1356	0.1344	0.1332	0.1318
9	0.1256	0.1269	0.1280	0.1290	0.1299	0.1306	0.1311	0.1315	0.1317	0.1318
10	0.1017	0.1040	0.1063	0.1084	0.1104	0.1123	0.1140	0.1157	0.1172	0.1186
11	0.0749	0.0776	0.0802	0.0828	0.0853	0.0878	0.0902	0.0925	0.0948	0.0970
12	0.0505	0.0530	0.0555	0.0579	0.0604	0.0629	0.0654	0.0679	0.0703	0.0728
13	0.0315	0.0334	0.0354	0.0374	0.0395	0.0416	0.0438	0.0459	0.0481	0.0504
14	0.0182	0.0196	0.0210	0.0225	0.0240	0.0256	0.0272	0.0289	0.0306	0.0324
15	0.0098	0.0107	0.0116	0.0126	0.0136	0.0147	0.0158	0.0169	0.0182	0.0194
16	0.0050	0.0055	0.0060	0.0066	0.0072	0.0079	0.0086	0.0093	0.0101	0.0109
17	0.0024	0.0026	0.0029	0.0033	0.0036	0.0040	0.0044	0.0048	0.0053	0.0058
18	0.0011	0.0012	0.0014	0.0015	0.0017	0.0019	0.0021	0.0024	0.0026	0.0029
19	0.0005	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.0010	0.0011	0.0012	0.0014
20	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0005	0.0006
21	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003
22	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.000

	λ									
x	**9.1**	**9.2**	**9.3**	**9.4**	**9.5**	**9.6**	**9.7**	**9.8**	**9.9**	**10**
0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000
1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0008	0.0007	0.0007	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
2	0.0046	0.0043	0.0040	0.0037	0.0034	0.0031	0.0029	0.0027	0.0025	0.0023
3	0.0140	0.0131	0.0123	0.0115	0.0107	0.0100	0.0093	0.0087	0.0081	0.0076
4	0.0319	0.0302	0.0285	0.0269	0.0254	0.0240	0.0226	0.0213	0.0201	0.0189
5	0.0581	0.0555	0.0530	0.0506	0.0483	0.0460	0.0439	0.0418	0.0398	0.0378
6	0.0881	0.0851	0.0822	0.0793	0.0764	0.0736	0.0709	0.0682	0.0656	0.0631
7	0.1145	0.1118	0.1091	0.1064	0.1037	0.1010	0.0982	0.0955	0.0928	0.0901
8	0.1302	0.1286	0.1269	0.1251	0.1232	0.1212	0.1191	0.1170	0.1148	0.1126
9	0.1317	0.1315	0.1311	0.1306	0.1300	0.1293	0.1284	0.1274	0.1263	0.1251
10	0.1198	0.1210	0.1219	0.1228	0.1235	0.1241	0.1245	0.1249	0.1250	0.1251
11	0.0991	0.1012	0.1031	0.1049	0.1067	0.1083	0.1098	0.1112	0.1125	0.1137
12	0.0752	0.0776	0.0799	0.0822	0.0844	0.0866	0.0888	0.0908	0.0928	0.0948
13	0.0526	0.0549	0.0572	0.0594	0.0617	0.0640	0.0662	0.0685	0.0707	0.0729
14	0.0342	0.0361	0.0380	0.0399	0.0419	0.0439	0.0459	0.0479	0.0500	0.0521
15	0.0208	0.0221	0.0235	0.0250	0.0265	0.0281	0.0297	0.0313	0.0330	0.0347
16	0.0118	0.0127	0.0137	0.0147	0.0157	0.0168	0.0180	0.0192	0.0204	0.0217
17	0.0063	0.0069	0.0075	0.0081	0.0088	0.0095	0.0103	0.0111	0.0119	0.0128
18	0.0032	0.0035	0.0039	0.0042	0.0046	0.0051	0.0055	0.0060	0.0065	0.0071
19	0.0015	0.0017	0.0019	0.0021	0.0023	0.0026	0.0028	0.0031	0.0034	0.0037
20	0.0007	0.0008	0.0009	0.0010	0.0011	0.0012	0.0014	0.0015	0.0017	0.0019
21	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0006	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009
22	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004
23	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
24	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001

	λ									
x	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0010	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0037	0.0018	0.0008	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0102	0.0053	0.0027	0.0013	0.0006	0.0003	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000
5	0.0224	0.0127	0.0070	0.0037	0.0019	0.0010	0.0005	0.0002	0.0001	0.0001
6	0.0411	0.0255	0.0152	0.0087	0.0048	0.0026	0.0014	0.0007	0.0004	0.0002
7	0.0646	0.0437	0.0281	0.0174	0.0104	0.0060	0.0034	0.0018	0.0010	0.0005
8	0.0888	0.0655	0.0457	0.0304	0.0194	0.0120	0.0072	0.0042	0.0024	0.0013
9	0.1085	0.0874	0.0661	0.0473	0.0324	0.0213	0.0135	0.0083	0.0050	0.0029
10	0.1194	0.1048	0.0859	0.0663	0.0486	0.0341	0.0230	0.0150	0.0095	0.0058
11	0.1194	0.1144	0.1015	0.0844	0.0663	0.0496	0.0355	0.0245	0.0164	0.0106
12	0.1094	0.1144	0.1099	0.0984	0.0829	0.0661	0.0504	0.0368	0.0259	0.0176
13	0.0926	0.1056	0.1099	0.1060	0.0956	0.0814	0.0658	0.0509	0.0378	0.0271
14	0.0728	0.0905	0.1021	0.1060	0.1024	0.0930	0.0800	0.0655	0.0514	0.0387
15	0.0534	0.0724	0.0885	0.0989	0.1024	0.0992	0.0906	0.0786	0.0650	0.0516
16	0.0367	0.0543	0.0719	0.0866	0.0960	0.0992	0.0963	0.0884	0.0772	0.0646
17	0.0237	0.0383	0.0550	0.0713	0.0847	0.0934	0.0963	0.0936	0.0863	0.0760
18	0.0145	0.0256	0.0397	0.0554	0.0706	0.0830	0.0909	0.0936	0.0911	0.0844
19	0.0084	0.0161	0.0272	0.0409	0.0557	0.0699	0.0814	0.0887	0.0911	0.0888
20	0.0046	0.0097	0.0177	0.0286	0.0418	0.0559	0.0692	0.0798	0.0866	0.0888
21	0.0024	0.0055	0.0109	0.0191	0.0299	0.0426	0.0560	0.0684	0.0783	0.0846
22	0.0012	0.0030	0.0065	0.0121	0.0204	0.0310	0.0433	0.0560	0.0676	0.0769
23	0.0006	0.0016	0.0037	0.0074	0.0133	0.0216	0.0320	0.0438	0.0559	0.0669
24	0.0003	0.0008	0.0020	0.0043	0.0083	0.0144	0.0226	0.0328	0.0442	0.0557
25	0.0001	0.0004	0.0010	0.0024	0.0050	0.0092	0.0154	0.0237	0.0336	0.0446
26	0.0000	0.0002	0.0005	0.0013	0.0029	0.0057	0.0101	0.0164	0.0246	0.0343
27	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0016	0.0034	0.0063	0.0109	0.0173	0.0254
28	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0009	0.0019	0.0038	0.0070	0.0117	0.0181
29	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004	0.0011	0.0023	0.0044	0.0077	0.0125
30	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0006	0.0013	0.0026	0.0049	0.0083
31	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0007	0.0015	0.0030	0.0054
32	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0004	0.0009	0.0018	0.0034
33	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0005	0.0010	0.0020
34	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0006	0.0012
35	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0007
36	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004
37	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002
38	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
39	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

Table 4. Fonction de répartition de la loi de Poisson

$$\text{Fournit la probabilité } P(X \leq x) = \sum_{r=0}^{x} \lambda^r \frac{e^{-\lambda}}{r!} \text{ pour } X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

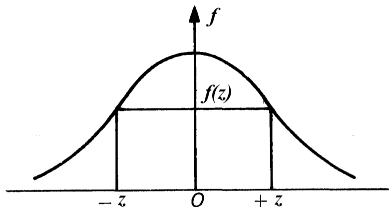
λ=	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
x= 0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679	0.3012	0.2466	0.2019	0.1653
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725	0.7358	0.6626	0.5918	0.5249	0.4628
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371	0.9197	0.8795	0.8335	0.7834	0.7306
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865	0.9810	0.9662	0.9463	0.9212	0.8913
4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977	0.9963	0.9923	0.9857	0.9763	0.9636
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9994	0.9985	0.9968	0.9940	0.9896
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994	0.9987	0.9974
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

λ=	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.5	5.0	5.5
x= 0	0.1353	0.1108	0.0907	0.0743	0.0608	0.0498	0.0408	0.0334	0.0273	0.0224	0.0183	0.0111	0.0067	0.0041
1	0.4060	0.3546	0.3084	0.2674	0.2311	0.1991	0.1712	0.1468	0.1257	0.1074	0.0916	0.0611	0.0404	0.0266
2	0.6767	0.6227	0.5697	0.5184	0.4695	0.4232	0.3799	0.3397	0.3027	0.2689	0.2381	0.1736	0.1247	0.0884
3	0.8571	0.8194	0.7787	0.7360	0.6919	0.6472	0.6025	0.5584	0.5152	0.4735	0.4335	0.3423	0.2650	0.2017
4	0.9473	0.9275	0.9041	0.8774	0.8477	0.8153	0.7806	0.7442	0.7064	0.6678	0.6288	0.5321	0.4405	0.3575
5	0.9834	0.9751	0.9643	0.9510	0.9349	0.9161	0.8946	0.8705	0.8441	0.8156	0.7851	0.7029	0.6160	0.5289
6	0.9955	0.9925	0.9884	0.9828	0.9756	0.9665	0.9554	0.9421	0.9267	0.9091	0.8893	0.8311	0.7622	0.6860
7	0.9989	0.9980	0.9967	0.9947	0.9919	0.9881	0.9832	0.9769	0.9692	0.9599	0.9489	0.9134	0.8666	0.8095
8	0.9998	0.9995	0.9991	0.9985	0.9976	0.9962	0.9943	0.9917	0.9883	0.9840	0.9786	0.9597	0.9319	0.8944
9	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9989	0.9982	0.9973	0.9960	0.9942	0.9919	0.9829	0.9682	0.9462
10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9992	0.9987	0.9981	0.9972	0.9933	0.9863	0.9747
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9996	0.9994	0.9991	0.9976	0.9945	0.9890
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9992	0.9980	0.9955
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9993	0.9983
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

λ=	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	11.0	10.0	12.0	14.0	15.0
x= 0	0.0025	0.0015	0.0009	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0174	0.0113	0.0073	0.0047	0.0030	0.0019	0.0012	0.0008	0.0005	0.0002	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000
2	0.0620	0.0430	0.0296	0.0203	0.0138	0.0093	0.0062	0.0042	0.0028	0.0012	0.0028	0.0005	0.0001	0.0000
3	0.1512	0.1118	0.0818	0.0591	0.0424	0.0301	0.0212	0.0149	0.0103	0.0049	0.0103	0.0023	0.0005	0.0002
4	0.2851	0.2237	0.1730	0.1321	0.0996	0.0744	0.0550	0.0403	0.0293	0.0151	0.0293	0.0076	0.0018	0.0009
5	0.4457	0.3690	0.3007	0.2414	0.1912	0.1496	0.1157	0.0885	0.0671	0.0375	0.0671	0.0203	0.0055	0.0028
6	0.6063	0.5265	0.4497	0.3782	0.3134	0.2562	0.2068	0.1649	0.1301	0.0786	0.1301	0.0458	0.0142	0.0076
7	0.7440	0.6728	0.5987	0.5246	0.4530	0.3856	0.3239	0.2687	0.2202	0.1432	0.2202	0.0895	0.0316	0.0180
8	0.8472	0.7916	0.7291	0.6620	0.5925	0.5231	0.4557	0.3918	0.3328	0.2320	0.3328	0.1550	0.0621	0.0374
9	0.9161	0.8774	0.8305	0.7764	0.7166	0.6530	0.5874	0.5218	0.4579	0.3405	0.4579	0.2424	0.1094	0.0699
10	0.9574	0.9332	0.9015	0.8622	0.8159	0.7634	0.7060	0.6453	0.5830	0.4599	0.5830	0.3472	0.1757	0.1185
11	0.9799	0.9661	0.9467	0.9208	0.8881	0.8487	0.8030	0.7520	0.6968	0.5793	0.6968	0.4616	0.2600	0.1848
12	0.9912	0.9840	0.9730	0.9573	0.9362	0.9091	0.8758	0.8364	0.7916	0.6887	0.7916	0.5760	0.3585	0.2676
13	0.9964	0.9929	0.9872	0.9784	0.9658	0.9486	0.9261	0.8981	0.8645	0.7813	0.8645	0.6815	0.4644	0.3632
14	0.9986	0.9970	0.9943	0.9897	0.9827	0.9726	0.9585	0.9400	0.9165	0.8540	0.9165	0.7720	0.5704	0.4657
15	0.9995	0.9988	0.9976	0.9954	0.9918	0.9862	0.9780	0.9665	0.9513	0.9074	0.9513	0.8444	0.6694	0.5681
16	0.9998	0.9996	0.9990	0.9980	0.9963	0.9934	0.9889	0.9823	0.9730	0.9441	0.9730	0.8987	0.7559	0.6641
17	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9984	0.9970	0.9947	0.9911	0.9857	0.9678	0.9857	0.9370	0.8272	0.7489
18	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9993	0.9987	0.9976	0.9957	0.9928	0.9823	0.9928	0.9626	0.8826	0.8195
19	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9995	0.9989	0.9980	0.9965	0.9907	0.9965	0.9787	0.9235	0.8752
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9991	0.9984	0.9953	0.9984	0.9884	0.9521	0.9170
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9977	0.9993	0.9939	0.9712	0.9469
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9990	0.9997	0.9970	0.9833	0.9673
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9995	0.9999	0.9985	0.9907	0.9805
24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	1.0000	0.9993	0.9950	0.9888
25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	1.0000	0.9997	0.9974	0.9938
26	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9987	0.9967
27	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9983
28	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9991
29	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996
30	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
31	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
32	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Table 5. Densité de probabilité de la loi normale centrée réduite

$$f(t) = f(-t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$$



t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,	0,398 9	0,397 0	0,391 0	0,381 4	0,368 3	0,352 1	0,333 2	0,312 3	0,289 7	0,266 1
1,	0,242 0	0,217 9	0,194 2	0,171 4	0,149 7	0,129 5	0,110 9	0,094 0	0,079 0	0,065 6
2,	0,054 0	0,044 0	0,035 5	0,028 3	0,022 4	0,017 5	0,013 6	0,010 4	0,007 9	0,006 0
3,	0,004 4	0,003 3	0,002 4	0,001 7	0,001 2	0,000 9	0,000 6	0,000 4	0,000 3	0,000 2

Exemples :

$$\begin{aligned} f(1.3) &= 0.1714 \\ f(-2.7) &= f(2.7) = 0.0104. \end{aligned}$$

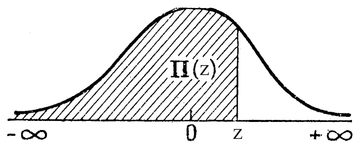


Table 6. Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite
Probabilité d'une valeur inférieure à t :
$$P(Z < t) = F(t) = \pi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-z^2/2} dz.$$
Pour $t < 0$, on a $P(Z < t) = 1 - \pi(-t)$

u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992

Nota. — La table donne les valeurs de $\pi(t)$ pour z positif. Lorsque z est négatif il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemple : pour $t = 1.37$ $\quad \pi(t) = 0.9147$

pour $t = -1.37$ $\quad \pi(t) = \pi(-1.37) = 1 - \pi(1.37) = 1 - 0.9147 = 0.0853.$

Table 6'. Fractiles de la Loi normale centrée réduite

$$U \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Pour $P < 0.5$ (colonne de gauche et ligne supérieure) les fractiles sont négatifs.

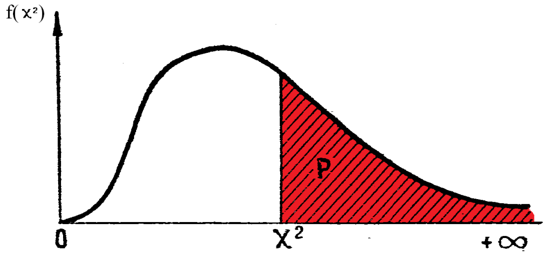
Pour $P > 0.5$ (colonne de droite et ligne inférieure) les fractiles sont positifs.

P	**0**	**0.001**	**0.002**	**0.003**	**0.004**	**0.005**	**0.006**	**0.007**	**0.008**	**0.009**	**0.01**	
0	infini	3.0902	2.8782	2.7478	2.6521	2.5758	2.5121	2.4573	2.4089	2.3656	2.3263	**0.99**
0.01	2.3263	2.2904	2.2571	2.2262	2.1973	2.1701	2.1444	2.1201	2.0969	2.0748	2.0537	**0.98**
0.02	2.0537	2.0335	2.0141	1.9954	1.9774	1.9600	1.9431	1.9268	1.9110	1.8957	1.8808	**0.97**
0.03	1.8808	1.8663	1.8522	1.8384	1.8250	1.8119	1.7991	1.7866	1.7744	1.7624	1.7507	**0.96**
0.04	1.7507	1.7392	1.7279	1.7169	1.7060	1.6954	1.6849	1.6747	1.6646	1.6546	1.6449	**0.95**
0.05	1.6449	1.6352	1.6258	1.6164	1.6072	1.5982	1.5893	1.5805	1.5718	1.5632	1.5548	**0.94**
0.06	1.5548	1.5464	1.5382	1.5301	1.5220	1.5141	1.5063	1.4985	1.4909	1.4833	1.4758	**0.93**
0.07	1.4758	1.4684	1.4611	1.4538	1.4466	1.4395	1.4325	1.4255	1.4187	1.4118	1.4051	**0.92**
0.08	1.4051	1.3984	1.3917	1.3852	1.3787	1.3722	1.3658	1.3595	1.3532	1.3469	1.3408	**0.91**
0.09	1.3408	1.3346	1.3285	1.3225	1.3165	1.3106	1.3047	1.2988	1.2930	1.2873	1.2816	**0.90**
0.10	1.2816	1.2759	1.2702	1.2646	1.2591	1.2536	1.2481	1.2426	1.2372	1.2319	1.2265	**0.89**
0.11	1.2265	1.2212	1.2160	1.2107	1.2055	1.2004	1.1952	1.1901	1.1850	1.1800	1.1750	**0.88**
0.12	1.1750	1.1700	1.1650	1.1601	1.1552	1.1503	1.1455	1.1407	1.1359	1.1311	1.1264	**0.87**
0.13	1.1264	1.1217	1.1170	1.1123	1.1077	1.1031	1.0985	1.0939	1.0893	1.0848	1.0803	**0.86**
0.14	1.0803	1.0758	1.0714	1.0669	1.0625	1.0581	1.0537	1.0494	1.0451	1.0407	1.0364	**0.85**
0.15	1.0364	1.0322	1.0279	1.0237	1.0194	1.0152	1.0110	1.0069	1.0027	0.9986	0.9945	**0.84**
0.16	0.9945	0.9904	0.9863	0.9822	0.9782	0.9741	0.9701	0.9661	0.9621	0.9581	0.9542	**0.83**
0.17	0.9542	0.9502	0.9463	0.9424	0.9385	0.9346	0.9307	0.9269	0.9230	0.9192	0.9154	**0.82**
0.18	0.9154	0.9116	0.9078	0.9040	0.9002	0.8965	0.8927	0.8890	0.8853	0.8816	0.8779	**0.81**
0.19	0.8779	0.8742	0.8706	0.8669	0.8632	0.8596	0.8560	0.8524	0.8488	0.8452	0.8416	**0.80**
0.20	0.8416	0.8381	0.8345	0.8310	0.8274	0.8239	0.8204	0.8169	0.8134	0.8099	0.8064	**0.79**
0.21	0.8064	0.8030	0.7995	0.7961	0.7926	0.7892	0.7858	0.7824	0.7790	0.7756	0.7722	**0.78**
0.22	0.7722	0.7688	0.7655	0.7621	0.7588	0.7554	0.7521	0.7488	0.7454	0.7421	0.7388	**0.77**
0.23	0.7388	0.7356	0.7323	0.7290	0.7257	0.7225	0.7192	0.7160	0.7128	0.7095	0.7063	**0.76**
0.24	0.7063	0.7031	0.6999	0.6967	0.6935	0.6903	0.6871	0.6840	0.6808	0.6776	0.6745	**0.75**
0.25	0.6745	0.6713	0.6682	0.6651	0.6620	0.6588	0.6557	0.6526	0.6495	0.6464	0.6433	**0.74**
0.26	0.6433	0.6403	0.6372	0.6341	0.6311	0.6280	0.6250	0.6219	0.6189	0.6158	0.6128	**0.73**
0.27	0.6128	0.6098	0.6068	0.6038	0.6008	0.5978	0.5948	0.5918	0.5888	0.5858	0.5828	**0.72**
0.28	0.5828	0.5799	0.5769	0.5740	0.5710	0.5681	0.5651	0.5622	0.5592	0.5563	0.5534	**0.71**
0.29	0.5534	0.5505	0.5476	0.5446	0.5417	0.5388	0.5359	0.5330	0.5302	0.5273	0.5244	**0.70**
0.30	0.5244	0.5215	0.5187	0.5158	0.5129	0.5101	0.5072	0.5044	0.5015	0.4987	0.4958	**0.69**
0.31	0.4958	0.4930	0.4902	0.4874	0.4845	0.4817	0.4789	0.4761	0.4733	0.4705	0.4677	**0.68**
0.32	0.4677	0.4649	0.4621	0.4593	0.4565	0.4538	0.4510	0.4482	0.4454	0.4427	0.4399	**0.67**
0.33	0.4399	0.4372	0.4344	0.4316	0.4289	0.4261	0.4234	0.4207	0.4179	0.4152	0.4125	**0.66**
0.34	0.4125	0.4097	0.4070	0.4043	0.4016	0.3989	0.3961	0.3934	0.3907	0.3880	0.3853	**0.65**
0.35	0.3853	0.3826	0.3799	0.3772	0.3745	0.3719	0.3692	0.3665	0.3638	0.3611	0.3585	**0.64**
0.36	0.3585	0.3558	0.3531	0.3505	0.3478	0.3451	**0.3425**	0.3398	0.3372	0.3345	0.3319	**0.63**
0.37	0.3319	0.3292	0.3266	0.3239	0.3213	0.3186	0.3160	0.3134	0.3107	0.3081	0.3055	**0.62**
0.38	0.3055	0.3029	0.3002	0.2976	0.2950	0.2924	0.2898	0.2871	0.2845	0.2819	0.2793	**0.61**
0.39	0.2793	0.2767	0.2741	0.2715	0.2689	0.2663	0.2637	0.2611	0.2585	0.2559	0.2533	**0.60**
0.40	0.2533	0.2508	**0.2482**	0.2456	0.2430	0.2404	0.2378	0.2353	0.2327	0.2301	0.2275	**0.59**
0.41	0.2275	0.2250	0.2224	0.2198	0.2173	0.2147	0.2121	0.2096	0.2070	0.2045	0.2019	**0.58**
0.42	0.2019	0.1993	0.1968	0.1942	0.1917	0.1891	0.1866	0.1840	0.1815	0.1789	0.1764	**0.57**
0.43	0.1764	0.1738	0.1713	0.1687	0.1662	0.1637	0.1611	0.1586	0.1560	0.1535	0.1510	**0.56**
0.44	0.1510	0.1484	0.1459	0.1434	0.1408	0.1383	0.1358	0.1332	0.1307	0.1282	0.1257	**0.55**
0.45	0.1257	0.1231	0.1206	0.1181	0.1156	0.1130	0.1105	0.1080	0.1055	0.1030	0.1004	**0.54**
0.46	0.1004	0.0979	0.0954	0.0929	0.0904	0.0878	0.0853	0.0828	0.0803	0.0778	0.0753	**0.53**
0.47	0.0753	0.0728	0.0702	0.0677	0.0652	0.0627	0.0602	0.0577	0.0552	0.0527	0.0502	**0.52**
0.48	0.0502	0.0476	0.0451	0.0426	0.0401	0.0376	0.0351	0.0326	0.0301	0.0276	0.0251	**0.51**
0.49	0.0251	0.0226	0.0201	0.0175	0.0150	0.0125	0.0100	0.0075	0.0050	0.0025	0.0000	**0.50**
	0.01	**0.009**	**0.008**	**0.007**	**0.006**	**0.005**	**0.004**	**0.003**	**0.002**	**0.001**	**0**	**P**

Exemples : $\pi(u) = P(U \le u) = P = 0.6340 \Longrightarrow u = 0.3425$;
$\pi(u) = P(U \le u) = P = 0.4020 \longrightarrow u = -0.2482$

Table 7. Distribution de χ^2 (Loi de K. Pearson)

Valeur de χ^2 ayant la probabilité P d'être dépassée.



La table donne la fonction :

$$1 - F(\chi^2) = P(X \geq \chi^2) = P$$

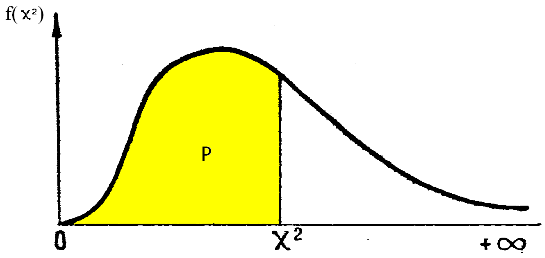
ν	P = 0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345
4	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,662	18,475
8	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141
15	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578
16	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000
17	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409
18	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805
19	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191
20	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566
21	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932
22	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289
23	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638
24	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980
25	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314
26	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642
27	18,114	20,703	22,719	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963
28	18,939	21,588	23,647	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278
29	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588
30	20,599	23,364	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892

Nota : ν est le nombre de degrés de liberté.
Pour ν supérieur à 30, on admet que la variable aléatoire est approximativement distribuée suivant la loi normale centrée réduite ($\mu = 0, \sigma = 1$).

Table 8. Fonction de répartition de la loi de χ^2.

Fonction de répartition $F(x) = P(X < x)$

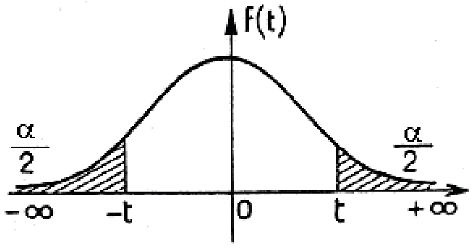
Si ν est le nombre de degrés de liberté d'une variable χ^2, si x est un nombre positif et si on pose : $F(x) = P(X < x) = P$. La table donne x pour différentes valeurs de ν et de P.



ν \ P	0.01	0.025	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99
1	0.00	0.00	0.00	0.01	0.06	0.14	0.27	0.45	0.70	1.07	1.64	2.70	3.84	5.02	6.63
2	0.02	0.05	0.10	0.21	0.44	0.71	1.02	1.38	1.83	2.40	3.21	4.60	5.99	7.37	9.21
3	0.11	0.21	0.35	0.58	1.00	1.42	1.86	2.36	2.94	3.66	4.64	6.25	7.81	9.34	11.34
4	0.29	0.48	0.71	1.06	1.64	2.19	2.75	3.35	4.04	4.87	5.98	7.77	9.48	11.14	13.27
5	0.55	0.83	1.14	1.61	2.34	2.99	3.65	4.35	5.13	6.06	7.28	9.23	11.07	12.83	15.08
6	0.87	1.23	1.63	2.20	3.07	3.82	4.57	5.34	6.21	7.23	8.55	10.64	12.59	14.44	16.81
7	1.23	1.68	2.16	2.83	3.82	4.67	5.49	6.34	7.28	8.38	9.80	12.01	14.06	16.01	18.47
8	1.64	2.17	2.73	3.48	4.59	5.52	6.42	7.34	8.35	9.52	11.03	13.36	15.50	17.53	20.09
9	2.08	2.70	3.32	4.16	5.38	6.39	7.35	8.34	9.41	10.65	12.24	14.68	16.91	19.02	21.66
10	2.55	3.24	3.94	4.86	6.17	7.26	8.29	9.34	10.47	11.78	13.44	15.98	18.30	20.48	23.20
11	3.05	3.81	4.57	5.57	6.98	8.14	9.23	10.34	11.52	12.89	14.63	17.27	19.67	21.92	24.72
12	3.57	4.40	5.22	6.30	7.80	9.03	10.18	11.34	12.58	14.01	15.81	18.54	21.02	23.33	26.21
13	4.10	5.00	5.89	7.04	8.63	9.92	11.12	12.33	13.63	15.11	16.98	19.81	22.36	24.73	27.68
14	4.66	5.62	6.57	7.78	9.46	10.82	12.07	13.33	14.68	16.22	18.15	21.06	23.68	26.11	29.14
15	5.22	6.26	7.26	8.54	10.30	11.72	13.02	14.33	15.73	17.32	19.31	22.30	24.99	27.48	30.57
16	5.81	6.90	7.96	9.31	11.15	12.62	13.98	15.33	16.77	18.41	20.46	23.54	26.29	28.84	31.99
17	6.40	7.56	8.67	10.08	12.00	13.53	14.93	16.33	17.82	19.51	21.61	24.76	27.58	30.19	33.40
18	7.01	8.23	9.39	10.86	12.85	14.43	15.89	17.33	18.86	20.60	22.75	25.98	28.86	31.52	34.80
19	7.63	8.90	10.11	11.65	13.71	15.35	16.85	18.33	19.91	21.68	23.90	27.20	30.14	32.85	36.19
20	8.26	9.59	10.85	12.44	14.57	16.26	17.80	19.33	20.95	22.77	25.03	28.41	31.41	34.16	37.56
21	8.89	10.28	11.59	13.23	15.44	17.18	18.76	20.33	21.99	23.85	26.17	29.61	32.67	35.47	38.93
22	9.54	10.98	12.33	14.04	16.31	18.10	19.72	21.33	23.03	24.93	27.30	30.81	33.92	36.78	40.28
23	10.19	11.68	13.09	14.84	17.18	19.02	20.69	22.33	24.06	26.01	28.42	32.00	35.17	38.07	41.63
24	10.85	12.40	13.84	15.65	18.06	19.94	21.65	23.33	25.10	27.09	29.55	33.19	36.41	39.36	42.97
25	11.52	13.11	14.61	16.47	18.93	20.86	22.61	24.33	26.14	28.17	30.67	34.38	37.65	40.64	44.31
26	12.19	13.84	15.37	17.29	19.82	21.79	23.57	25.33	27.17	29.24	31.79	35.56	38.88	41.92	45.64
27	12.87	14.57	16.15	18.11	20.70	22.71	24.54	26.33	28.21	30.31	32.91	36.74	40.11	43.19	46.96
28	13.56	15.30	16.92	18.93	21.58	23.64	25.50	27.33	29.24	31.39	34.02	37.91	41.33	44.46	48.27
29	14.25	16.04	17.70	19.76	22.47	24.57	26.47	28.33	30.28	32.46	35.13	39.08	42.55	45.72	49.58
30	14.95	16.79	18.49	20.59	23.36	25.50	27.44	29.33	31.31	33.53	36.25	40.25	43.77	46.97	50.89
31	15.65	17.53	19.28	21.43	24.25	26.43	28.40	30.33	32.34	34.59	37.35	41.42	44.98	48.23	52.19
32	16.36	18.29	20.07	22.27	25.14	27.37	29.37	31.33	33.38	35.66	38.46	42.58	46.19	49.48	53.48
33	17.07	19.04	20.86	23.11	26.04	28.30	30.34	32.33	34.41	36.73	39.57	43.74	47.39	50.72	54.77
34	17.78	19.80	21.66	23.95	26.93	29.24	31.31	33.33	35.44	37.79	40.67	44.90	48.60	51.96	56.06
35	18.50	20.56	22.46	24.79	27.83	30.17	32.28	34.33	36.47	38.85	41.77	46.05	49.80	53.20	57.34
36	19.23	21.33	23.26	25.64	28.73	31.11	33.25	35.33	37.50	39.92	42.87	47.21	50.99	54.43	58.61
37	19.96	22.10	24.07	26.49	29.63	32.05	34.22	36.33	38.53	40.98	43.97	48.36	52.19	55.66	59.89
38	20.69	22.87	24.88	27.34	30.53	32.99	35.19	37.33	39.56	42.04	45.07	49.51	53.38	56.89	61.16
39	21.42	23.65	25.69	28.19	31.44	33.93	36.16	38.33	40.59	43.10	46.17	50.65	54.57	58.12	62.42
40	22.16	24.43	26.50	29.05	32.34	34.87	37.13	39.33	41.62	44.16	47.26	51.80	55.75	59.34	63.69
41	22.90	25.21	27.32	29.90	33.25	35.81	38.10	40.33	42.65	45.22	48.36	52.94	56.94	60.56	64.95
42	23.65	25.99	28.14	30.76	34.15	36.75	39.07	41.33	43.67	46.28	49.45	54.09	58.12	61.77	66.20
43	24.39	26.78	28.96	31.62	35.06	37.69	40.04	42.33	44.70	47.33	50.54	55.23	59.30	62.99	67.45
44	25.14	27.57	29.78	32.48	35.97	38.64	41.02	43.33	45.73	48.39	51.63	56.36	60.48	64.20	68.70
45	25.90	28.36	30.61	33.35	36.88	39.58	41.99	44.33	46.76	49.45	52.72	57.50	61.65	65.41	69.95
46	26.65	29.16	31.43	34.21	37.79	40.52	42.96	45.33	47.78	50.50	53.81	58.64	62.82	66.61	71.20
47	27.41	29.95	32.26	35.08	38.70	41.47	43.94	46.33	48.81	51.56	54.90	59.77	64.00	67.82	72.44
48	28.17	30.75	33.09	35.94	39.62	42.42	44.91	47.33	49.84	52.61	55.99	60.90	65.17	69.02	73.68
49	28.94	31.55	33.93	36.81	40.53	43.36	45.88	48.33	50.86	53.66	57.07	62.03	66.33	70.22	74.91
50	29.70	32.35	34.76	37.68	41.44	44.31	46.86	49.33	51.89	54.72	58.16	63.16	67.50	71.42	76.15
60	37.48	40.48	43.18	46.45	50.64	53.80	56.62	59.33	62.13	65.22	68.97	74.39	79.08	83.29	88.37
70	45.44	48.75	51.73	55.32	59.89	63.34	66.39	69.33	72.35	75.68	79.71	85.52	90.53	95.02	100.42
80	53.54	57.15	60.39	64.27	69.20	72.91	76.18	79.33	82.56	86.11	90.40	96.57	101.87	106.62	112.32
90	61.75	65.64	69.12	73.29	78.55	82.51	85.99	89.33	92.76	96.52	101.05	107.56	113.14	118.13	124.11
100	70.06	74.22	77.92	82.35	87.94	92.12	95.80	99.33	102.94	106.90	111.66	118.49	124.34	129.56	135.80
200	156.43	162.72	168.27	174.83	183.00	189.04	194.31	199.33	204.43	209.98	216.60	226.02	233.99	241.05	249.44

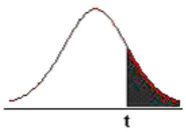
Table 9. Distribution T_n (Loi de Student)

Valeurs de T_n ayant la probabilité α d'être dépassée en valeur absolue : $P(|T_n| > t_0) = \alpha$.



n \ α	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,929
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
80	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Table 10. Distribution T_n (Loi de Student)



Valeurs de $t_{n,\alpha}$ de n degrés de liberté ayant la probabilité α d'être dépassée : $\boldsymbol{P(T_n > t_{n,\alpha}) = \alpha}$

n \ α	0.40	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0005
1	0.324920	1.000000	3.077684	6.313752	12.70620	31.82052	63.65674	636.6192
2	0.288675	0.816497	1.885618	2.919986	4.30265	6.96456	9.92484	31.5991
3	0.276671	0.764892	1.637744	2.353363	3.18245	4.54070	5.84091	12.9240
4	0.270722	0.740697	1.533206	2.131847	2.77645	3.74695	4.60409	8.6103
5	0.267181	0.726687	1.475884	2.015048	2.57058	3.36493	4.03214	6.8688
6	0.264835	0.717558	1.439756	1.943180	2.44691	3.14267	3.70743	5.9588
7	0.263167	0.711142	1.414924	1.894579	2.36462	2.99795	3.49948	5.4079
8	0.261921	0.706387	1.396815	1.859548	2.30600	2.89646	3.35539	5.0413
9	0.260955	0.702722	1.383029	1.833113	2.26216	2.82144	3.24984	4.7809
10	0.260185	0.699812	1.372184	1.812461	2.22814	2.76377	3.16927	4.5869
11	0.259556	0.697445	1.363430	1.795885	2.20099	2.71808	3.10581	4.4370
12	0.259033	0.695483	1.356217	1.782288	2.17881	2.68100	3.05454	4.3178
13	0.258591	0.693829	1.350171	1.770933	2.16037	2.65031	3.01228	4.2208
14	0.258213	0.692417	1.345030	1.761310	2.14479	2.62449	2.97684	4.1405
15	0.257885	0.691197	1.340606	1.753050	2.13145	2.60248	2.94671	4.0728
16	0.257599	0.690132	1.336757	1.745884	2.11991	2.58349	2.92078	4.0150
17	0.257347	0.689195	1.333379	1.739607	2.10982	2.56693	2.89823	3.9651
18	0.257123	0.688364	1.330391	1.734064	2.10092	2.55238	2.87844	3.9216
19	0.256923	0.687621	1.327728	1.729133	2.09302	2.53948	2.86093	3.8834
20	0.256743	0.686954	1.325341	1.724718	2.08596	2.52798	2.84534	3.8495
21	0.256580	0.686352	1.323188	1.720743	2.07961	2.51765	2.83136	3.8193
22	0.256432	0.685805	1.321237	1.717144	2.07387	2.50832	2.81876	3.7921
23	0.256297	0.685306	1.319460	1.713872	2.06866	2.49987	2.80734	3.7676
24	0.256173	0.684850	1.317836	1.710882	2.06390	2.49216	2.79694	3.7454
25	0.256060	0.684430	1.316345	1.708141	2.05954	2.48511	2.78744	3.7251
26	0.255955	0.684043	1.314972	1.705618	2.05553	2.47863	2.77871	3.7066
27	0.255858	0.683685	1.313703	1.703288	2.05183	2.47266	2.77068	3.6896
28	0.255768	0.683353	1.312527	1.701131	2.04841	2.46714	2.76326	3.6739
29	0.255684	0.683044	1.311434	1.699127	2.04523	2.46202	2.75639	3.6594
30	0.255605	0.682756	1.310415	1.697261	2.04227	2.45726	2.75000	3.6460
∞	0.253347	0.674490	1.281552	1.644854	1.95996	2.32635	2.57583	3.2905

Table 11. Fonction de répartition de la loi de Student T_n

Soit T une v.a. ayant une densité de Student à ν degrés de liberté. Le fractile t_p d'ordre p est tel que : $\boldsymbol{P(T \leq t_p) = \int_{-\infty}^{t_p} f(t)dt = p}$

Pour les valeurs de $\boldsymbol{p = 0,5}$ on a $\boldsymbol{t_p = 0}$, pour $\boldsymbol{p < 0,5}$ le fractile est négatif et $\boldsymbol{t_p = -t_{1-p}}$.

Pour les valeurs de $\boldsymbol{\nu}$ ne figurant pas dans la table, on pourra :
- procéder par interpolation
- utiliser l'approximation par la loi normale réduite ($\boldsymbol{\nu > 100}$).

Par exemple, pour $\boldsymbol{\nu = 9}$ et $\boldsymbol{p = 0,975}$, on lit $\boldsymbol{t_p = 2,262}$
et pour $\boldsymbol{p = 0,025}$, on déduit $\boldsymbol{t_p = t_{0,025} = -t_{1-0,025} = -t_{0,975} = -2,262}$.
Pour $\boldsymbol{\nu = 75}$ et $\boldsymbol{p = 0,975}$, on lit $\boldsymbol{u = \frac{1}{2}(1,994 + 1,990) = 1,992.}$

ν \ p	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.1584	0.3249	0.5095	0.7265	1.0000	1.3764	1.9626	3.0777	6.3137	12.7062	31.8210	63.6559
2	0.1421	0.2887	0.4447	0.6172	0.8165	1.0607	1.3862	1.8856	2.9200	4.3027	6.9645	9.9250
3	0.1366	0.2767	0.4242	0.5844	0.7649	0.9785	1.2498	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8408
4	0.1338	0.2707	0.4142	0.5686	0.7407	0.9410	1.1896	1.5332	2.1318	2.7765	3.7469	4.6041
5	0.1322	0.2672	0.4082	0.5594	0.7267	0.9195	1.1558	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	0.1311	0.2648	0.4043	0.5534	0.7176	0.9057	1.1342	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.1303	0.2632	0.4015	0.5491	0.7111	0.8960	1.1192	1.4149	1.8946	2.3646	2.9979	3.4995
8	0.1297	0.2619	0.3995	0.5459	0.7064	0.8889	1.1081	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	0.1293	0.2610	0.3979	0.5435	0.7027	0.8834	1.0997	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	0.1289	0.2602	0.3966	0.5415	0.6998	0.8791	1.0931	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	0.1286	0.2596	0.3956	0.5399	0.6974	0.8755	1.0877	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	0.1283	0.2590	0.3947	0.5386	0.6955	0.8726	1.0832	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	0.1281	0.2586	0.3940	0.5375	0.6938	0.8702	1.0795	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	0.1280	0.2582	0.3933	0.5366	0.6924	0.8681	1.0763	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	0.1278	0.2579	0.3928	0.5357	0.6912	0.8662	1.0735	1.3406	1.7531	2.1315	2.6025	2.9467
16	0.1277	0.2576	0.3923	0.5350	0.6901	0.8647	1.0711	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	0.1276	0.2573	0.3919	0.5344	0.6892	0.8633	1.0690	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	0.1274	0.2571	0.3915	0.5338	0.6884	0.8620	1.0672	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	0.1274	0.2569	0.3912	0.5333	0.6876	0.8610	1.0655	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	0.1273	0.2567	0.3909	0.5329	0.6870	0.8600	1.0640	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
21	0.1272	0.2566	0.3906	0.5325	0.6864	0.8591	1.0627	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314
22	0.1271	0.2564	0.3904	0.5321	0.6858	0.8583	1.0614	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188
23	0.1271	0.2563	0.3902	0.5317	0.6853	0.8575	1.0603	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073
24	0.1270	0.2562	0.3900	0.5314	0.6848	0.8569	1.0593	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7970
25	0.1269	0.2561	0.3898	0.5312	0.6844	0.8562	1.0584	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874
26	0.1269	0.2560	0.3896	0.5309	0.6840	0.8557	1.0575	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27	0.1268	0.2559	0.3894	0.5306	0.6837	0.8551	1.0567	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707
28	0.1268	0.2558	0.3893	0.5304	0.6834	0.8546	1.0560	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
29	0.1268	0.2557	0.3892	0.5302	0.6830	0.8542	1.0553	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
30	0.1267	0.2556	0.3890	0.5300	0.6828	0.8538	1.0547	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500
40	0.1265	0.2550	0.3881	0.5286	0.6807	0.8507	1.0500	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045
50	0.1263	0.2547	0.3875	0.5278	0.6794	0.8489	1.0473	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778
60	0.1262	0.2545	0.3872	0.5272	0.6786	0.8477	1.0455	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603
70	0.1261	0.2543	0.3869	0.5268	0.6780	0.8468	1.0442	1.2938	1.6669	1.9944	2.3808	2.6479
80	0.1261	0.2542	0.3867	0.5265	0.6776	0.8461	1.0432	1.2922	1.6641	1.9901	2.3739	2.6387
90	0.1260	0.2541	0.3866	0.5263	0.6772	0.8456	1.0424	1.2910	1.6620	1.9867	2.3685	2.6316
100	0.1260	0.2540	0.3864	0.5261	0.6770	0.8452	1.0418	1.2901	1.6602	1.9840	2.3642	2.6259
200	0.1258	0.2537	0.3859	0.5252	0.6757	0.8434	1.0391	1.2858	1.6525	1.9719	2.3451	2.6006

Le manuel de travaux dirigés "Eléments de la théorie des probabilités. Travaux dirigés" suit la structure et le contenu du livre du même titre en “Bases de la statistique – Ire partie" des spécialités Gestion et Economie de la filière de gestion à l’Université de Sofia "Sv. Kliment Ohridski". On y trouve une synthèse des définitions, des formules et des théorèmes (sans vérification et la preuve) de la théorie des probabilités: espaces de probabilité, la combinatoire, la probabilité, variables aléatoires et leurs caractéristiques, fonctions de distribution, la loi des grands nombres, théorème central limite. Les solutions de quelques exemples sont considérées et beaucoup de problèmes à résoudre sont donnés avec les réponses et des conseils pour la solution.

Le manuel est destiné aux travaux dirigés en “Bases de la statistique - Ire partie” et vise à développer des compétences pratiques pour déterminer les caractéristiques et les lois de distribution de variables aléatoires.

eISSN 2367-8666