1

eISSN: 2367-8666

ИИКТ – БАН

Лекции по компютърни науки и технологии

Шест теми по управление на риска

Иван Попчев

eISBN: 978-954-91700-8-5

Поредицата „**Лекции по компютърни науки и технологии на Института по информационни и комуникационни технологии при Българската академия на науките**“ публикува в електронен вид учебници и учебни помагала, предназначени за студенти и докторанти по различни програми по информатика, изчислителна математика, математическо моделиране, комуникационни технологии, и др., както и за всички читатели, интересуващи се от тези научни области. Учебниците се базират върху курсове лекции, водени от учени на Института по информационни и комуникационни технологии – БАН в различни български университети и в Центъра за обучение на докторанти в БАН. Публикуваните материали са с отворен достъп - те са свободно достъпни без заплащане.

Редактори

Геннадий Агре (Главен редактор) – ИИКТ-БАН
e-mail: agre@iinf.bas.bg

Вера Ангелова – ИИКТ-БАН
e-mail: vangelova@iit.bas.bg

Пенчо Маринов – ИИКТ-БАН
e-mail: pencho@bas.bg

eISSN: 2367-8666

http://parallel.bas.bg/lcst/

Съдържание

Тема 1. Вземане на финансови решения при риск и неопределеност

В теорията за вземане на решения обект на внимание са различни практически задачи, част от които могат най-общо да се групират в три класа:

1. добре структурирани или количествено определени задачи, които получават числени оценки;
2. неструктурирани или качествено изразени задачи, в които количествените зависимости са почти напълно неизвестни;
3. лошо структурирани или смесени задачи, които съдържат както количествени така и качествени елементи.

Известно е, че методите на изследване на операциите са предназначени предимно за добре структурирани задачи. Използваните методи позволяват вземане на обосновано решение по определен проблем в зависимост от постановката на съответната задача.

Най-общо според условията са възможни два типични подхода за избор на оптимално решение:

- ⇨ Когато факторите на средата имат стохастична природа и са известни техните вероятностни характеристики, тогава изборът е в **условия на риск;**
- ⇨ Когато факторите на средата се характеризират с неопределеност, която се обуславя от липса на достатъчно надеждни методи или средства за измерване и наличие на смущаващи фактори с неустойчиви статистически характеристики и т.н., тогава изборът е в **условия на неопределеност.**

При **избор в условия на риск** се формира множество на критериите за оптималност, които са функции на различни променливи фактори (аргументи). Числената стойност на даден критерий се обуславя предимно от две групи фактори. Първата група фактори зависи от ЛВР (лицето, вземащо решение) и се наричат елементи на решението. Най-често елементите на решението имат строго определено (детерминирано) значение за стойността на критерия. Тези фактори могат да са например избор на конкретни параметри. Втората група фактори могат да характеризират условията, в които функционира обектът на проектиране. Лицето**,** което взема решение, не може да оказва влияние върху стойността на тези фактори, които представляват случайни процеси, но е необходимо да има информация за техните вероятностни разпределения. В противен случай изборът се извършва в условия на неопределеност.

Изборът в условия на риск означава, че ЛВР не е наясно с възможните случайни фактори и приема някаква стойност за вероятностните характеристики на случайните фактори на средата. Впоследствие **е** възможно да се окаже, че избраните стойности на вероятностните характеристики не съответстват на действителните, в които функционира обектът на проектирането. В това по същество се състои изборът наречен избор в условия на риск.

Съгласно общата теория на статистическите решения съществуват различни принципи на избор на решение. Под принцип за избор на решение се разбира най-общо математическата формулировка и характерът на критериите за избор на решение.

Използват се основно два вида критерии:

- ⇨ Критерии, които характеризират печалбата (ползата, полезността) при направения избор на решението, като решението е толкова по-добро, колкото е по-голяма стойността на разглеждания критерий (задача за максимизация на критерия);

- ⇨ Критерии, които характеризират разходите (загубите, риска) за осъществяване на приетото решение, като е очевидна необходимостта да се постигне възможно по-малка стойност (задача за минимизация на критерия).

Съществен е и изборът на стратегия, отнасяща се до поведението на външната среда. Съществуват няколко разновидности за стратегия на избора - принцип на maxmin или minimax. За критерии от първия вид оптимална е стратегията, при които се максимизира минималната печалба. За критерии от втория вид оптимална е стратегията, при която се минимизират максималните разходи.

Стратегията на maxmin (minimax) се основава на предположението, че случайната външна среда ще реализира възможно най-неблагоприятни условия (подход, основаващ се на краен песимизъм). Безразличното по същество поведение на външната среда се заменя с поведението на злонамерен противник според терминологията на теорията на игрите. Тази стратегия е обоснована, когато проектантът или ЛВР иска да гарантира максимално своето решение.

По-често е целесъобразно да се приложи междинна стратегия между крайния песимизъм и необоснования оптимизъм, като се въвежда тегловен коефициент θ, $0 \leq \theta \leq 1$, за коригиране на стратегията на maxmin (minimax).

Стратегията (принципът) на недостатъчното основание на Лаплас се изразява в предположението, че всички фактори на средата са равновероятни, т.е. липсват доминиращи фактори. Независимо от това, че се изхожда от такова „необосновано предположение”, тази стратегия има своето предимство, тъй като не се основава на гранични, а на осреднени условия.

Изборът в условия на неопределеност се основава на система от априорни знания за ЛВР относно поведението на факторите на средата. По същество решението има субективен характер, с което нараства отговорността на ЛВР. Като формален апарат могат да се прилагат методите на теорията на размитите множества. Въвеждат се размити релации относно качествени стойности на факторите на средата и на целевата функция (критерия за оптималност). Една размита релация се характеризира с функция на принадлежност, която е субективна мярка за степента на изпълнение (достоверност) например на релацията фактор/критерии.

Най-често при сложните обекти и системи, които се характеризират със съществени количествени и качествени особености, факторите (аргументите) на избора от ЛВР са детерминирани количествени параметри (величини), а факторите на средата имат случаен характер или се оценяват чрез качествени (например лингвистични) стойности.

В резултат на съвместното действие на тези два различни по характер фактори изходът (критерият) е многозначен, т.е. има размити (неточно определени) стойности. Тези стойности може да се интерпретират като качествени (лингвистични), логически или интервални. Един подходящ апарат за формално описание на критерия за оптималност на решението могат да са многозначните логически вероятностни и съответно многозначните логически размити функции. Прилагането на този подходящ апарат е извън периметъра на настоящото разглеждане.

При класиране на проекти в условията на риск и неопределеност се препоръчва конструиране и използване на модели, алгоритми и програмни инструменти за вземане на многокритериални решения.

Два алгоритъма за квази многокритериален анализ

Разглеждат се два основни алгоритъма, условно отбелязани като алгоритъм „RETURN / RISK” и алгоритъм „SIGMA”. Тези алгоритми се определят като квази (като че ли, почти) многокритериални, тъй като те предлагат на ЛВР да извърши своя избор по повече от един критерий.

При първия алгоритъм „RETURN / RISK” предварително може да се маркира, че за всеки проект по всеки критерий може да се получи оценка, която да съответства на печалба, нетна сегашна стойност, възвръщаемост и т.н. Например нека се предположи, че е възможно пресмятането на инвестиционната възвръщаемост и риска за различни прогнозирани състояния на икономическата среда.

Прогнозираните състояния, съгласно икономическата теория и практика, могат да съответстват на различни варианти на икономическата ситуация, като например криза, стагнация, начално развитие, оживление, подем, силно развитие (бум) и т.н. Безспорно този брой и съдържание (същност) на прогнозираните икономически ситуации не е строго регламентиран и практиката може да формира и други допустими ситуации, които съответстват на предпочитанията на лицето, вземащо решение.

За конструирането на алгоритъма „инвестиционна възвръщаемост/риск” (алгоритъм „RETURN / RISK”) се използват резултатите от анализа и избора на методи и модели за многокритериален анализ, изследванията на операциите и многокритериална оптимизация. Поради това този алгоритъм често се определя като **алгоритъм по статистически (класически) критерии.**

Предполага се, че са дадени:

- A е крайно множество на алтернативи (проекти, варианти, сценарии, инвестиционни решения);
- S е крайно множество на допустимите прогнозирани икономически ситуации;
- $\left\| a_{ij} \right\|$ е матрицата на оценката на i-тата алтернатива $\boldsymbol{A_i}$ при j-тата допустима прогнозирана икономическа ситуация
$$S'_j \ ; i = \overline{1,m} \ ; \ j = \overline{1,n};$$
- q_j**.** е вероятността за сбъдване на j-тата допустима прогнозирана икономическа проблемна ситуация, $\forall j (q_j > 0)$. Трябва да е изпълнено и равенството $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$.

Като интерактивна процедура и граничен случай може да се предвиди ситуация, когато всички вероятности са равни $q^L = \dfrac{1}{n}$ съгласно принципа на Лаплас (принципа на недостатъчното основание).

За всяка алтернатива A_i се изчислява съответната средна стойност (средно претеглена стойност, математическо очакване) по израза:

$$\overline{a}_i = \sum_{j=1}^{n} q_i a_{ij} \,,$$

респективно $\overline{a}_i^L = \sum_{j=1}^{n} \dfrac{a_{ij}}{n}$, която е средна стойност, изчислена съгласно принципа на Лаплас.

$\|a_{ij}\|$ матрицата е $m \times n$ матрица, която в термините на теорията на матричните игри е матрица на играта, платежна матрица или матрица на печалбата.

В алгоритъма RETURN / RISK разглежданата матрица е матрица на оценките на инвестиционната възвръщаемост на i-тата алтернатива при j-тата допустима прогнозирана икономическа ситуация.

Знае се, че инвестиционната възвръщаемост според характера и същността на разглежданата задача може да е: вътрешна норма на възвръщаемост, средноаритметична или средногеометрична възвръщаемост, обща или чиста възвръщаемост (номинална, чиста възвръщаемост след данъци, чиста възвръщаемост след отчитане на инфлация), ретроспективна (историческа, отчетна) или очакваната (желана) възвръщаемост и т.н.

По-нататък в алгоритъма RETURN / RISK се изчисляват следните стойности в матрицата:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij},$$

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij},$$

$$\beta_i = \max_i a_{ij},$$

$$\beta = \min_j \beta_i = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Числото α се нарича **долна цена на играта,** или **максимин,** съответно β е **горна цена на играта,** или **минимакс.**

Рискът r_{ij} при алтернатива A_i и допустима прогнозирана икономическа ситуация S_j се изчислява по израза:

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}$$

откъдето следва, че $r_{ij} \geq 0$.

Матрицата $\|r_{ij}\|$ представя „удачност” или „неудачност” от използването на една или друга алтернатива в дадена конкретна допустима прогнозирана икономическа ситуация.

Рискът е изчислен като разлика между максималната за дадена ситуация S_j възвръщаемост β_j; и съответстващата на алтернативата A_i възвръщаемост a_{ij}. В този смисъл така изчисленият „риск” често се определя като „съжаление (regret)”.

Целесъобразно е да се направи едно отклонение за компонентите на инвестиционния риск при инвестициите в реални активи, като се маркира, че това могат да са: технологичен риск, отраслов риск, регионален риск, политически риск, законов риск, риск от инфлация, валутен риск, финансов риск, корпоративен риск и т.н., според особеностите на задачата.

Освен това на всеки етап на изследване на риска на инвестиционни проекти могат да привличат различни методи за анализ. Тези методи задължително трябва да включват: метода на анализ на чувствителността; метода на критичната точка; методи на анализа на сценариите; стимулационния метод; метода на дървото на решенията; метода на безрисковите еквиваленти; метода на включване на рискова премия в нормата на сконтиране и т.н.

По-нататък в разглеждания алгоритъм се изчислява средна стойност (математическото очакване, средно претеглената стойност) на риска

$$\bar{r}_i = \sum_{j=1}^{n} q_i r_{ij},$$

респективно $\bar{r}_i^L = \sum_{j=1}^{n} \frac{r_{ij}}{n}$, която е съответната средна стойност на риска, изчислена съгласно принципа на Лаплас.

След това се изчисляват следните осем критерия за избор на оптимална (в тесен смисъл на думата) алтернатива:

1. Критерий максимум на математическото очакване на възвръщаемостта:

$$E_a = \max_i \bar{a}_i.$$

2. Критерий минимум на математическото очакване на риска

$$E_r = \min_i \bar{r}_i.$$

Аналогично:

3. Критерий на Лаплас за възвръщаемостта

$$L_a = \max_i \bar{a}_i^L.$$

4. Критерий на Лаплас за риска

$$L_r = \min_i \bar{r}_i^L.$$

5. Критерий на Уолд за максимина на възвръщаемостта

$$W = \max_i \min_j a_{ij} = \alpha.$$

Този критерий се определя като критерий на крайния песимизъм, тъй като за оптимална се избира тази алтернатива, при която минималната възвръщаемост е максимална.

6. Критерий на Сейвидж за минимаксния риск

$$S = \min_i \max_j r_{ij} = \min_i \gamma_i, \text{ като полагаме } \max_j r_{ij} = \gamma_i.$$

Този критерий се определя също като критерий на крайния песимизъм, тъй като за оптимална се избира тази алтернатива, при която рискът има най-малката стойност в най-неблагоприятната ситуация (когато рискът е максимален).

7. Критерий на обобщения максимин (песимизма – оптимизма) или критерий на Хурвиц

$$H = \max_i \{\theta \min_j a_{ij} + (1-\theta) \max_j a_{ij}\} = \max_i \{\theta\alpha_i + (1-\theta)\beta_i\} = \max_i h_i$$

Коефициентът θ, избиран между 0 и 1 ($0 \le \theta \le 1$) е мярка за песимизма – оптимизма на изследователя или на лицето, вземащо решение. За граничните стойности,

7 a. ако $\theta = 1$, то $H^{(1)} = \max_i \min_j a_{ij} = \alpha$, което е критерият на Уолд, а

7 b. ако $\theta = 0$, то $H^{(0)} = \max_i \max_j a_{ij}$, което е критерий на крайния оптимизъм.

Тогава, когато $0 \le \theta \le 1$, се получава „нещо” между крайния песимизъм и крайния оптимизъм за възвръщаемостта. Коефициентът θ се избира от изследователя или лицето, вземащо решение, в зависимост от субективни съображения. Понякога този коефициент се определя като мярка за песимизма, за риска при ЛВР.

За да се „преодолеят” субективните съображения при конкретни задачи независимо от избраната стойност на θ, критерият на Хурвиц се изчислява и за граничните стойности $\theta = 0$ и $\theta = 1$ и това се определя като **проверка на устойчивост на решението при възвръщаемост**.

8. Последният критерий е критерий на обобщения минимакс (песимизма – оптимизма) на риска:

$$F = \min_i\{\theta \max_j r_{ij} + (1-\theta)\min_j r_{ij}\} = \min_i\{\theta\gamma_i + (1-\theta)\upsilon_j\} = \min_i f_i$$

Аналогично $0 < \theta < 1$ е същата мярка за песимизма – оптимизма на изследователя или на лицето, вземащо решение. За граничните стойности,

8 а. ако $\theta = 1$, то $F^{(1)} = \min_i \max_j r_{ij}$, което е критерият на Сейвидж, а

8 b. ако $\theta = 0, F^{(0)} = \min_i \min_j r_{ij}$, което е критерият на крайния „оптимизъм".

Респективно, когато $0 < \theta < 1$, се получава „нещо" между крайния песимизъм и крайния оптимизъм за риска. За да се „преодолеят" субективните съображения при конкретни задачи независимо от избраната стойност на θ, критерият F се изчислява и за граничните стойности $\theta = 0$ и $\theta = 1$ и това се определя като **проверка на устойчивост на решението при риск**.

Като резултат от алгоритъма RETURN / RISK се избират оптимални проекти (алтернативи) по осем критерия и заедно с проверките за устойчивост се получават общо 12 критерия. В частния случай, ако по всички критерии е избрана една и съща алтернатива, задачата е окончателно решена. Ако обаче това не е така, то задачата за крайния избор на една алтернатива зависи от правилата за избор, които сам формулира изследователят или лицето, вземащо решение.

Вторият интерактивен алгоритъм за многокритериален анализ (SIGMA) е основан на степента на разсейване на една дискретна случайна величина около математическото й очакване.

Като основна характеристика за степен на разсейване на стойностите на една случайна величина (например доход, печалба, възвръщаемост и т.н.) може да се приеме средно-квадратичното (стандартното) отклонение.

За да се конструира SIGMA алгоритъмът за многокритериален анализ, трябва да са дадени:

- A е крайното множество на алтернативи (проекти, варианти сценарии, инвестиционни решения);
- ***S*** е крайното множество на икономическите проблемни ситуации;
- $\|a_{ij}\|$ е матрицата на оценката на *i*-тата алтернатива при *j*-тата икономическа ситуация.;
- q_j е вероятността за сбъдване на *j*-тата икономическа проблемна ситуация, $\forall j(q_j > 0)$;

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

Като интерактивна процедура и граничен случай може да се предвиди ситуацията, когато всички вероятности са равни $q^L = \frac{1}{n}$ съгласно принципа на Лаплас (принцип на недостатъчното основание). За всяка алтернатива A_i се изчисляват:

$$\bar{a}_i = \sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij},$$

респективно $\bar{a}_i^L = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{n}$, и средно-квадратичното отклонение $\sigma_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - \bar{a}_i)^2 . q_j}$,

респективно $\sigma_i^L = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - \bar{a}_i^L)^2 . \frac{1}{n}}$ по Лаплас.

След това се изчисляват следните **осем критерия за избор на алтернатива според отношението на лицето, вземащо решение (ЛВР), към риска**:

1. Когато ЛВР е безразлично към риска,
$$K_\delta = \max_i \bar{a}_i .$$
2. Когато ЛВР е склонно към риска,
$$K_P = \max_i (\bar{a}_i + \sigma_i).$$
3. Когато ЛВР е предпазливо към риска,
$$K_П = \max_i (\bar{a}_i - \sigma_i).$$
4. Когато ЛВР иска пълна гаранция до анулиране на риска,
$$K_o = \max_i (\bar{a}_i - 2\sigma_i).$$
5. Когато по Лаплас ЛВР е безразлично към риска,
$$K_\delta^L = \max_i \bar{a}_i^L .$$
6. Когато по Лаплас ЛВР е склонно към риска,
$$K_P^L = \max_i (\bar{a}_i^L + \sigma_i^L).$$
7. Когато по Лаплас ЛВР е предпазливо към риска,
$$K_П^L = \max_i (\bar{a}_i^L - \sigma_i^L).$$
8. Когато по Лаплас ЛВР иска пълна гаранция за анулиране на риска,
$$K_o^L = \max_i (\bar{a}_i^L - 2\sigma_i^L).$$

Като резултат от изчисленията по осемте критерия се получава множеството на избраните по многокритериалния анализ алтернативи. Изборът от това множество на една алтернатива зависи от предпочитанията на лицето, вземащо решение към риска.

За някои практически задачи се извършва и проверка за пълно анулиране на риска по два критерия:

9. $K_0^* = \max_i \left(\overline{a_i} - 10\sigma_i\right).$

10. $K_0^{*L} = \max_i \left(\overline{a_i}^L - 10\sigma_i^L\right).$

Възможно е да се премине и към следваща итерация, в която да се промени броят на икономическите проблемни ситуации, респективно матрицата $\|a_{ij}\|$ и вероятностите за сбъдване на тези икономически проблемни ситуации, и т.н.

Два алгоритъма за линейна многокритериална оптимизация

За да се конструира определен алгоритъм за многокритериална оптимизация, се определят две основни понятия: алтернативи и критерии. С чувство за неудобство от повторение на някои вече известни неща ще се включат в текста отново някои понятия и постановки.

Алтернативи (варианти, сценарии, инвестиционни решения, проекти) A_i ще се наричат елементите (реалните обекти), които се оценяват и измежду които трябва да се направи избор. Тяхното множество се означава с A, $\forall i(A_i \in A)$. Критерии (частни или локални) ще се наричат свойствата на алтернативите, които се използват за тяхна оценка, или някакви числови функции, зададени върху A, които трябва да се екстремизират, или някакви отношения на предпочитане, отразяващи различни видове превъзходство между алтернативите $A_i \in A$**.** Най-често алтернативите се оценяват с числови функции и изходните данни се записват във вид на матрица $\left\| x_{ij} \right\|$, където *i* е номер на алтернатива (номер на ред), *j* е номер на критерий (номер на стълб), а x_{ij} е оценката на *i*-тата алтернатива по критерий с номер ***j*.** Приема се, че броят на частните критерии е краен и критерият с номер *j* се означава с K_j.

Разглеждат се такива задачи за многокритериална оценка и избор, при които обикновено за дадени се считат: множество от алтернативи (измежду които ще се избира) и няколко числови функции (зададени върху това множество), които се наричат частни критерии и които трябва едновременно „да се екстремизират” чрез акта на избор. С други думи, алтернативите се описват чрез стойностите (числата), които им съответстват по всеки частен критерий. Могат да се използват и термини като: характеристики, показатели и други, които означават най-общо производни физически величини. Тези термини често представят по-изчерпателно алтернативите и могат достатъчно добре реално да бъдат измерени или оценени. Частните критерии най-често са функции на тези величини (характеристики, показатели). В частност възможно е някой частен критерий да съвпада с една такава характеристика или показател. От друга страна, възможно е също така частните критерии да не са числови функции, а само някакви отношения на предпочитане, зададени върху множеството от алтернативите и получавани също на основа на характеристиките и показателите, представящи тези алтернативи.

При използването на някои методи е от значение данните (т.е. матрицата $\left\| x_{ij} \right\|$) да бъдат нормализирани, преди да се приложи съответният метод. Очевидно е, че при използване на много числови критерии често алтернативите ще имат числови оценки на основата на различни мерни единици. Удобно е оценките по частните критерии да не зависят от мерните единици и да са в сравними скали. Нормализация може да се извърши по различни начини.

Конструират се алгоритми, основани на два най-типични и разпространени метода: на **максимина** максимален гарантиран резултат (ММГР) – алгоритъм „MAXIMIN”, и на линейната комбинация на частните (локални) критерии (МЛКЧК) – алгоритъм „LINCOM”.

При метода на максимина се изисква привеждане на всички оценки x_{ij} на алтернативите по частните критерии към скали, които може да се сравняват. Най-често се използват относителни величини. Освен това всички критерии трябва да бъдат приведени във вид, при който е нужно те да се максимизират. Като единствена оценка на алтернативата се приема оценката, която е минимална (най-лоша) измежду нейните оценки по всички частни критерии. След това всички алтернативи се подреждат в ред на ненарастване на тези оценки, т.е. на първо място е такава алтернатива, чиято най-лоша оценка е максимална измежду най-лошите оценки на всички алтернативи.

Методът на максимина е полезен с това, че се опира на гарантирани резултати, но в този си вид той използва само неголяма част от информацията, съдържаща се в матрицата $\left\| x_{ij} \right\|$ и невинаги може да бъде препоръчан за използване. Алгоритъмът изисква да са известни числата x_{ij} и тегловите коефициенти λ_j. На алтернативата A_i се съпоставя числото $t_i = \min_j(\lambda_j, x_{ij})$. Алтернативите A_i се подреждат в ред на ненарастване на числата t_i.

Методът с линейна комбинация на частните критерии може да бъде използван, когато всички частни критерии (зададени като числови функции върху множеството *A*) са нормализирани и са приведени към един тип – например нужно е всички те да се максимизират.

Въпреки някои особености при прилагането, методът с линейна комбинация на частните критерии широко се използва поради простотата си и лекотата, с която се прави числено изследване на една конкретна задача.

Алгоритъмът предполага, че числата x_{ij} (нормализираните оценки на алтернативите A_i по критериите K_j и тегловните коефициенти λ_j са зададени. На по-важен (съществен, определящ, основен) критерий съответства по-голям коефициент λ_j. Изисква се изпълнение на неравенствата $\forall j(\lambda_j > 0)$ и трябва да е изпълнено условието $\sum_j \lambda_j = 1$. На алтернативите A_i се съпоставя числото $s_i = \sum_j \lambda_j x_{ij}$. Алтернативите се подреждат в ред на ненарастване на числата s_i.

При конструирането на алгоритмите „MAXMIN” и „LINCOM” и по двата метода може да се предвиди като интерактивна процедура и граничен случай, когато всички тегловни коефициенти са равни $\lambda^L = \frac{1}{n}$, което означава, че принципът на Лаплас (принципът на недостатъчното основание) е в сила.

В практиката двата алгоритъма „MAXMIN” и „LINCOM” се наричат още **алгоритми за класиране на проекти.**

Числен пример за вземане на решения по статистически (класически) критерии

<u>**Дадено е:**</u> „Пирин” АД има възможност да инвестира определен първоначален капитал в четири алтернативни проекта, както следва:

- A_1 – депозиране на капитала в търговска банка;
- A_2 – закупуване на краткосрочни сконтови държавни ценни книжа;
- A_3 – закупуване на щатски долари;
- A_4 – формиране на портфейл от ценни книжа, търгувани на „БФБ – София” АД.

Прогнозират се три възможни състояния на икономическите ситуации:

- S_1 – повишаване на годишния инфлационен коефициент в Р. България;
- S_2 – понижение на обменния курс на щатския долар спрямо еврото;
- S_3 – увеличение на спот (кешови) цени на петрола на средиземноморските терминали.

Известна е a_{ij} матрицата на печалбите (4×3), $i = \overline{1,4}; j = \overline{1,3}$.

S_j A_i	S_1	S_2	S_3
A_1	85	5	45
A_2	20	30	15
A_3	75	20	35
A_4	25	80	25

Вероятностите за сбъдване на състоянията на проблемните ситуации съответно са:

$$q_1 = 0.1; \quad q_2 = 0.5; \quad q_3 = 0.4.$$

Лицето, вземащо решение, задава $\theta = 0.2$.

Задачата е: Да се изберат оптималните проекти по всички критерии, в това число и по Лаплас за $q^L = 3^{-1}$.

Решение: Последователно се изчисляват оптималните проекти по всички 8 критерия и се извършват проверки за устойчивост на решението при печалба и риск. За целта се построяват съответни таблици T_{BP1}, T_{BP2} и T_{BP3}.

Таблица T_{BP1}

	S_1	S_2	S_3	α_i	γ_i	$\overline{a_i}$	$\overline{r_i}$	$\overline{a_i}^L$	$\overline{r_i}^L$
A_1	85 0	5 75	45 0	5	75	29	37.5	45*	25*
A_2	20 65	30 50	15 30	12	65	23	43.5	21.7	48.3
A_3	75 10	20 60	35 10	20	60*	31.5	35	43.3	26.7
A_4	25 60	80 0	25 20	25*	60*	52.5*	14*	43.3	26.7
q_j	0.1	0.5	0.4	$\sum_1^n q_j = 1; \sum q^L = 1.$					
q^L	3^{-1}	3^{-1}	3^{-1}						
β_j	85	80	45						

Таблица T_{BP1} е построена за пресмятане на шест критерия: E_a, E_r, L_a, L_r, W и S. В зададената матрица a_{ij} над диагонала са известните печалби, а под диагонала е изчисленият риск r_{ij}.

Примерни изчисления:

$$\overline{a_1} = (0.1)85 + (0.5)5 + (0.4)45 = 29; \qquad \overline{r_1} = (0.1)0 + (0.5)75 + (0.4)0 = 37.5;$$

$$\overline{a_2} = (0.1)20 + (0.5)30 + (0.4)15 = 23; \qquad \overline{r_2} = (0.1)65 + (0.5)50 + (0.4)30 = 43.5;$$

$$\overline{a_3} = (0.1)75 + (0.5)20 + (0.4)35 = 31.5; \qquad \overline{r_3} = (0.1)10 + (0.5)60 + (0.4)10 = 35;$$

$$\overline{a_4} = (0.1)25 + (0.5)80 + (0.4)25 = 52.5; \qquad \overline{r_4} = (0.1)60 + (0.5)0 + (0.4)20 = 14;$$

$$\overline{a_1}^L = 3^{-1}(85 + 5 + 45) = 45; \qquad \overline{r_1}^L = 3^{-1}(0 + 75 + 0) = 25;$$

$$\overline{a_2}^L = 3^{-1}(20 + 30 + 15) = 21.7; \qquad \overline{r_2}^L = 3^{-1}(65 + 50 + 30) = 48.3;$$

$$\overline{a_3}^L = 3^{-1}(75 + 20 + 35) = 43.3; \qquad \overline{r_3}^L = 3^{-1}(10 + 60 + 10) = 26.7;$$

$$\overline{a_4}^L = 3^{-1}(25 + 80 + 25) = 43.3; \qquad \overline{r_4}^L = 3^{-1}(60 + 0 + 20) = 26.7.$$

Таблица $\text{Т}_{\text{ВР2}}$

	$\boldsymbol{\alpha_i}$	$\boldsymbol{\beta_i}$	$\boldsymbol{\upsilon_i}$	$\boldsymbol{\gamma_i}$	$h_i^{0.2}$	$f_i^{0.2}$	h_i^{0}	f_i^{0}	h_i^{1}	f_i^{1}
$\boldsymbol{A_1}$	5	85	0	75	69*	15	85*	0*	5	75
$\boldsymbol{A_2}$	12	30	30	65	27	37	30	30	15	65
$\boldsymbol{A_3}$	20	75	10	60	64	20	75	10	20	60*
$\boldsymbol{A_4}$	25	80	0	60	69*	12*	80	0*	25*	60*

Таблица $\text{Т}_{\text{ВР2}}$ е построена за пресмятане на шест критерия: $\text{H}^{0.2}$, $\text{F}^{0.2}$, H^{0}, F^{0}, H^{1} и F^{1}, съответно за три стойности на $\theta \in \{0; 0.2; 1\}$.

Примерни изчисления:

$$h_1^{0.2} = (0.2)5 + (0.8)85 = 69; \qquad f_1^{0.2} = (0.2)75 + (0.8)0 = 15;$$

$$h_2^{0.2} = (0.2)15 + (0.8)30 = 27; \qquad f_2^{0.2} = (0.2)65 + (0.8)30 = 37;$$

$$h_3^{0.2} = (0.2)20 + (0.8)75 = 64; \qquad f_3^{0.2} = (0.2)60 + (0.8)10 = 20;$$

$$h_4^{0.2} = (0.2)25 + (0.8)80 = 69; \qquad f_4^{0.2} = (0.2)60 + (0.8)0 = 12.$$

В таблици $\text{Т}_{\text{ВР1}}$ и $\text{Т}_{\text{ВР2}}$ с * са маркирани тези стойности, които определят избора на оптимален проект за всеки критерий.

Таблица $\text{Т}_{\text{ВР3}}$

Критерии	E_a	E_r	L_a	L_r	W	S	$H^{0.2}$	$F^{0.2}$	H^{0}	F^{0}	H^{1}	F^{1}
Оптимални проекти	A_4	A_4	A_1	A_1	A_4	A_3 A_4	A_1 A_4	A_4	A_1	A_1 A_4	A_4	A_3 A_4

В таблица $\text{Т}_{\text{ВР3}}$ са представени решенията по всички осем критерия, които показват, че по 6 критерия оптимален проект е A_4, по 3 критерия е A_1, по 1 критерий е A_3, а A_2 не е предпочитан по нито един критерий. Изборът от лицето, вземащо решение, на един проект се определя от неговото предпочитание към всеки един от разгледаните осем критерия.

Проверката на устойчивост на решението при печалба и риск не променят препоръчаните проекти.

Числен пример за вземане на решения по SIGMA алгоритъм

Дадено е: „Рила” АД разглежда три допустими проекта A_1, A_2 и A_3 при три възможни състояния на икономическите ситуации S_1, S_2 и S_3 с известни вероятности за тези състояния $q_1 = 0.2$; $q_2 = 0.5$; $q_3 = 0.3$. Известна е a_{ij} матрицата на печалбите (загубите) (4×3), $i = \overline{1,3}$; $j = \overline{1,3}$.

S_j A_i	S_1	S_2	S_3
A_1	-5	+10	+20
A_2	-1	+6	+14
A_3	+4	+7	+9
q_j	0.2	0.5	0.3
q^L	3^{-1}	3^{-1}	3^{-1}

Задачата е: Да се изберат оптималните проекти по всички критерии, в това число и по Лаплас за $q^L = 3^{-1}$.

Решение: Последователно се изчисляват оптималните проекти по всички 8 критерия и се извършват проверките за пълно анулиране на риска. За целта се построяват таблици $\text{Т}_{\text{ВР4}}$, $\text{Т}_{\text{ВР5}}$ и $\text{Т}_{\text{ВР6}}$.

Таблица $\text{Т}_{\text{ВР4}}$

	$\overline{a_i}$	σ_i	$\overline{a_i}^L$	σ_i^L	$\overline{a_i} + \sigma_i$	$\overline{a_i} - \sigma_i$	$\overline{a_i} - 2\sigma_i$	$\overline{a_i}^L + \sigma_i^L$	$\overline{a_i}^L - \sigma_i^L$	$\overline{a_i}^L - 2\sigma_i^L$
A_1	10*	8.66	8.33*	10.27	18.66*	1.34	-7.32	18.6*	-1.94	-12.21
A_2	7	5.29	6.33	6.13	12.29	1.71	-3.58	14.46	0.2	-5.93
A_3	7	1.73	6.67	2.05	8.73	5.27*	3.54*	8.72	4.62*	2.57*

Таблица $\text{Т}_{\text{ВР4}}$ е построена за пресмятане на осем критерия: $K_\delta, K_p, K_\Pi, K_0, K_\delta^L, K_p^L, K_\Pi^L, K_0^L$.

Примерни изчисления:

$$\overline{a_1} = (0.2)(-5) + (0.5)10 + (0.3)20 = 10; \quad \sigma_1 = \sqrt{(0.2)(-5-10)^2 + (0.5)(10-10)^2 + (0.3)(20-10)^2} \approx 8.66;$$

$$\overline{a_2} = (0.2)(-1) + (0.5)6 + (0.3)14 = 7; \quad \sigma_2 = \sqrt{(0.2)(-1-7)^2 + (0.5)(6-7)^2 + (0.3)(14-7)^2} \approx 5.29;$$

$$\overline{a_3} = (0.2)4 + (0.5)7 + (0.3)9 = 7; \quad \sigma_3 = \sqrt{(0.2)(4-7)^2 + (0.5)(7-7)^2 + (0.3)(9-7)^2} \approx 1.73;$$

$$\overline{a_1}^L = 3^{-1}(-5+10+20) \approx 8.33; \quad \sigma_1^L = \sqrt{3^{-1}\left[(-5-8.33)^2 + (10-8.33)^2 + (20-8.33)^2\right]} \approx 10.27.$$

Таблица $Т_{ВР5}$

	a_i	σ_i	$\overline{a}_i^L$	σ_i^L	$\overline{a}_i - 10\sigma_i$	$\overline{a}_i^L - 10\sigma_i^L$
A_1	10	8.66	8.33	10.27	-76.6	-94.37
A_2	7	5.29	6.33	6.13	-45.9	-54.97
A_3	7	1.73	6.67	2.05	-10.3*	-13.83

Таблица $Т_{ВР5}$ е построена за пресмятане на два критерия: K_0^*, K_0^{*L}.

В таблици $Т_{ВР4}$ и $Т_{ВР5}$ с * са маркирани тези стойности, които определят избора на оптимален проект за всеки критерий.

Таблица $Т_{ВР6}$

Критерии	K_δ	K_p	$K_П$	K_0	K_δ^L	K_p^L	$K_П^L$	K_0^L
Оптимални проекти	A_1	A_1	A_3	A_3	A_1	A_1	A_3	A_3

В таблица $Т_{ВР6}$ са представени решенията по всички 10 критерия, които показват, че по 4 критерия оптимален проект е A_1, а по 6 критерия, в това число двата критерия за пълно анулиране на риска, оптимален проект е A_3. Изборът на един проект зависи от предпочитанията на лицето, вземащо решение към риска.

Числен пример за вземане на решения по двата алгоритъма MAXMIN и LINCOM

Дадено е: „Струма" АД трябва да класира четири проекта по три критерия K_1, K_2 и K_3, които са известните от инвестиционната практика NPV, IRR и Anu. По тези критерии оценките за всеки проект са съответно в хиляди лева, проценти и хиляди лева, а тегловите коефициенти са $\lambda_1 = 0.2$, $\lambda_2 = 0.5$, $\lambda_3 = 0.3$. Класирането на проектите е целесъобразно да се извърши и по принципа за недостатъчното основание $\lambda^L = 3^{-1}$.

Задачата е: Да се подредят проектите по всички критерии. Да се избере един проект, който може да е най-предпочитаният в получените наредби.

Решение: Изчисляват се съответните числа по двата алгоритъма – MAXMIN и LINCOM, и се конструира Таблица $Т_{ВР7}$.

Таблица T_{BP7}

K_j A_i	K_1 (хил. лева)	K_2 (%)	K_3 (хил. лева)	s_i	t_i	s_i^L	t_i^L
A_1	20 0.28	18 0.75	1 0.083	0.46	0.025	0.371	0.027
A_2	35 0.5	21 0.875	12 1	0.84	0.1	0.79	0.17
A_3	70 1	16 0.66	6 0.5	0.68	0.15	0.72	0.17
A_4	15 0.21	24 1	4 0.33	0.64	0.042	0.51	0.07
λ_j	0.2	0.5	0.3				
λ^L	3^{-1}	3^{-1}	3^{-1}				

В Таблица T_{BP8} над диагонала са реалните оценки по критериите в съответните дименсии, а под диагонала са нормализираните оценки.

Примерни изчисления:

$$S_1 = (0.2)(0.28) + (0.5)(0.75) + (0.3)(0.083) \approx 0.46;$$
$$S_2 = (0.2)(0.5) + (0.5)(0.875) + (0.3).1 \approx 0.84;$$
$$S_3 = (0.2).1 + (0.5)(0.66) + (0.3)(0.5) \approx 0.68;$$
$$S_4 = (0.2)(0.21) + (0.5).1 + (0.3)(0.33) \approx 0.64;$$

$$S_1^L = \tfrac{1}{3}(0.28 + 0.75 + 0.083) = 0.371;$$
$$S_2^L = \tfrac{1}{3}(0.5 + 0.875 + 1) = 0.79;$$
$$S_3^L = \tfrac{1}{3}(1 + 0.66 + 0.5) = 0.72;$$
$$S_4^L = \tfrac{1}{3}(0.21 + 1 + 0.33) = 0.51;$$

$$t_1 = \min\left[(0.2)(0.28);(0.5)(0.75);(0.3)(0.083)\right] = 0.025;$$
$$t_2 = \min\left[(0.2)(0.5);(0.5)(0.875);(0.3).1\right] = 0.1;$$
$$t_3 = \min\left[(0.2).1;(0.5)(0.66);(0.3)(0.5)\right] = 0.15;$$
$$t_4 = \min\left[(0.2)(0.21);(0.5).1;(0.3)(0.33)\right] = 0.042;$$

$$t_1{}^L = \min\left[3^{-1}(0.28);3^{-1}(0.75);3^{-1}(0.083)\right] \approx 0.027;$$
$$t_2{}^L = \min\left[3^{-1}(0.5);3^{-1}(0.875);3^{-1}.1\right] \approx 0.17;$$
$$t_3{}^L = \min\left[3^{-1}.1;3^{-1}(0.66);3^{-1}(0.5)\right] \approx 0.17;$$
$$t_4{}^L = \min\left[3^{-1}(0.21);3^{-1}.1;3^{-1}(0.33)\right] = 0.07;$$

Подреждането (класирането) на проектите е по:

- алгоритъма MAXMIN

  ММГР: $A_3 > A_2 > A_4 > A_1$

  ММГР по Лаплас: $A_2 = A_3 > A_4 > A_1$

- алгоритъма LINCOM

  ЛКЧК: $A_2 > A_3 > A_4 > A_1$

  ЛКЧК по Лаплас: $A_2 > A_3 > A_4 > A_1$

Лицето, вземащо решения по получените четири наредби, може да извърши анализи, сравнения или промени в началните условия.

Когато условието на задачата изисква да се избере един проект, то получените наредби дават достатъчно информация за такъв избор. В конкретното решение такъв проект може да е A_2.

Тема 2. Елементи на теорията на портфейла

Дефинирането на понятията очаквана възвръщаемост, риск и връзката между тях бележи възникването на портфейлната теория през 50-те години на XX век. В рамките на тази теория последователно се развиват няколко направления, които продължават развитието си, както самостоятелно, така и във взаимодействие с останалите.

Теория на Марковиц

През 1952 г. Марковиц поставя началото на съвременната теория на портфейла. В основата й лежи принципът на *ефективната диверсификация*, т.е. инвеститорът не просто диверсифицира, но и разпределя богатството си между определени инвестиционни носители. Марковиц приема, че измерител на риска на един портфейл е не средно претегленото стандартно отклонение, а ковариацията между активите. Инвеститорът не трябва да насочва вниманието си единствено към броя на активите, а към вида и характеристиките на връзките между тях.

Моделът на Марковиц се основава на следните предположения:

1. възвръщаемостта на една инвестиция сумира в себе си резултата от инвестицията, а инвеститорите предполагат нормално вероятностно разпределение на очакваните възвръщаемости;
2. оценките на инвеститорите за риска са пропорционални на отклонението на възвръщаемостта от приетата от тях очаквана възвръщаемост за дадена ценна книга или портфейл;
3. инвеститорите определят своите решения на базата на само два параметъра: очаквана възвръщаемост $E(r)$ и стандартно отклонение σ_r;
4. инвеститорът не е склонен към риск. При дадена очаквана възвръщаемост той предпочита минимум риск или при дадено равнище на риска, предпочита максимум очаквана възвръщаемост. Инвеститорите максимизират полезността си като функция на очакваната възвръщаемост и риска;
5. не съществуват безрискови активи;
6. не се извършват къси продажби (ценни книжа на заем и тяхното последващо продаване);
7. инвеститорите не могат да ползват заеми и с тях да закупуват ценни книжа;
8. няма данъци и транзакционни разходи;
9. инфлацията е взета предвид при определяне на очакваната възвръщаемост.

Основният принцип в теорията е принципът на доминирането. На базата на този принцип се определя множеството на ефективните портфейли. Няма ограничения за дела, който да се влага в една ценна книга, следователно се приема, че всяка комбинация от ценни книжа е допустима.

Основните показатели, характеризиращи портфейла, са очакваната възвръщаемост $E(r)$ и стандартното отклонение $\sigma_{r.}$ Марковиц приема за допълнителен показател ковариацията. Това е мярката на степента, с която два вариационни реда се движат заедно. При инвестирането тези редове са нормите на възвръщаемост на два актива:

$$\mathrm{cov}(r_A, r_B) = E[(r_A - E(r_A))(r_B - E(r_B))].$$

Стандартизирайки горната формула по метода на Браве получаваме коефициента на корелация:

$$\rho_{AB} = \frac{\mathrm{cov}(r_A, r_B)}{\sigma_A \sigma_B},$$

$$\mathrm{cov}(r_A, r_B) = \sigma_A \sigma_B \rho_{AB}.$$

С цел краткост на изложението по долу е показан методът за пресмятане на очакваната възвръщаемост и риска на портфейл съставен от повече от три актива *(n > 3)*. Формулите за изчисляване на двете величина са аналогични с тези за *n < 3:*

$$E(r_p) = \sum_{i-1}^{n} x_i E(r_i),$$

$$\sigma^2{}_p = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \,\mathrm{cov}(r_i, r_j)$$

или

$$\sigma^2{}_p = \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 \sigma_i{}^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \,\mathrm{cov}(r_i, r_j), i \neq j.$$

Формулите могат са се представят и по-опростено:

$$\sigma_p{}^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij},$$

$$\sigma_p{}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 \sigma_i{}^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}, i \neq j.$$

Необходимо е да се отбележи следната особеност. Възможните двуактивни портфейли могат да бъдат представени линейно. Комбинации на портфейли с повече активи се представят чрез повърхнини в *n* – мерното пространство, където *n* е броят на активите.

От горните формули за риск се вижда, че той зависи, както от риска на отделните съставляващи активи, така и от степента на ковариация (коефициентът на корелация) за всяка двойка активи. От формулата за ковариация се вижда, че ако действителната възвръщаемост на *i*-тия актив се отклонява в положителна посока ($r_j > E(r_j)$), а на *j*-тия актив – в отрицателна ($r_j < E(r_j)$), то ковариацията ще е отрицателна и общият риск на портфейла ще намалява. Ковариацията се нарича още интерактивен (взаимообусловен) риск. От тук следва, при комбинирането на активи в портфейл следва да се вземат предвид не само индивидуални им рискове (стандартните им отклонения), а и интерактивният им риск (ковариацията).

В случай, че се изгражда портфейл от активи с отрицателна корелация, рискът на портфейла може да е по-нисък то този на отделните активи. Следователно той може да се намали, дори ако в него се включи високорисков актив. Рискът ще намалява толкова повече, колкото корелацията между този високорисков актив и останалата част от портфейла е по-малка в алгебричен смисъл (в идеалния случай $\rho = -1$). В това се състои принципът на ефективната диверсификация – да се търсят активи с ниска корелация. Диверсификацията не се влияе от броя на активите, а от избора на подходящите активи. Под избор на подходящ актив се разбира избор на тегло за всеки актив в портфейла. Моделът на Марковиц дава правила за избор на тези тегла.

При дадена възвръщаемост на портфейла ефективната диверсификация води до намаляване на неговия риск. На тази база е изведен принципът на доминирането.

Портфейлът P_1 доминира (>) портфейла P_2, ако при една и съща очаквана възвръщаемост, първият има по-малък риск от втория $P_1 > P_2$.

Или, ако при $E(rP_1) = E(rP_2)$, $\sigma_{P1} < \sigma_{P2}$.

Същият принцип може да се дефинира и по друг начин. Портфейлът P1 доминира (>) портфейла P2, ако при едно и също равнище на риск, първият има по-голяма възвръщаемост от втория т.е.

$$\sigma_{P1} = \sigma_{P2}, E(rP_1) > E(rP_2)$$

Един портфейл се нарича ефективен, ако той доминира над всички възможни портфейли за дадено равнище на един от тези показатели.

Съвкупността от всички ефективни портфейли формира ефективната граница.

Моделът на Марковиц дава възможност да се построи ефективната граница на възможните портфейли, чрез използване на нелинейно оптимизиране:

$$\min \sigma_p = [\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}]^{\frac{1}{2}},$$

при условие:

$$E(r_p)^* = \sum_{i=1}^{n} x_i E(r_i)$$

където $E(r_p)^*$ е някакво желано равнище на очакваната възвръщаемост.

Намират се x_i т.е. теглата на отделните ценни книжа в портфейла, чийто риск се минимизира при дадено равнище на очакваната възвръщаемост.

Повтаряйки изчислителната процедура за голям брой равнища на очакваната възвръщаемост, получаваме ефективната граница. Марковиц е разработил компютърен алгоритъм, известен като *метод на критичните линии*, който бързо дава решение за различни портфейли от ефективната граница.

Възможните портфейли с най-добрите характеристики на отношението "риск / възвръщаемост" лежат върху ефективната граница. Инвеститорът трябва да избере един от тези портфейли, които в най-голяма степен се доближават до желаното съотношение "риск / очаквана възвръщаемост". Инвеститор, който не е склонен към поемане на риск, ще избере портфейл, разположен по-наляво и по-надолу по ефективната граница. Инвеститорът готов да поеме повече риск в замяна на по-голям очаквана възвръщаемост ще се избере портфейли по-нагоре и надясно по ефективната граница.

Въпреки, че моделът на Марковиц не посочва точно кой е оптималният портфейл, той позволява определянето на съвкупност от портфейли, между които трябва да се избира. Ето защо моделът на Марковиц е добро средство за анализ на портфейлния риск.

От какво зависи разположението на ефективната граница? Ако при изчисляването й са взети под внимание всички съществуващи активи и няма никакви ограничения относно включването им в портфейла, тогава тя е разположена най-вляво и предлага най-добрите условия "риск / очаквана възвръщаемост". Колкото е по-малък броят на активите, които могат да бъдат включени в портфейла и колкото повече са ограниченията върху тях, толкова ефективната граница е по-надясно и по-надолу и ще предлага по-лоши условия "риск / възвръщаемост". Моделът на Марковиц ограничава късите продажби и не разглежда безрискови активи, което се тълкува като ограничение за ефективните портфейли.

Важен е и въпросът за формата на ефективната граница. При наличните ограничения, активът с най-висока очаквана възвръщаемост лежи върху ефективната граница с най-висока очаквана възвръщаемост и портфейлът ще се състои единствено от актива с максимална възвръщаемост, а теглата на всички останали активи ще са нули. Високата възвръщаемост е за сметка на по-висок риск. Ако към този портфейл прибавим още активи с по-ниска очаквана възвръщаемост, то тази на новия портфейл също ще намалее. Комбинирането на високорискови активи с висока възвръщаемост води до незначително намаляване на очакваната възвръщаемост на портфейла и осезателно намаляване на неговия риск. Комбинирането на активи с по-ниска очаквана възвръщаемост и съответно с по-нисък индивидуален риск, води до осезателно намаляване на очакваната възвръщаемост. Това се дължи на специфичната извивка на ефективната граница, причина за която е ефектът на ковариациите на активите.

Както беше споменато по-горе, при комбиниране на голям брой активи, значение за риска на портфейла имат не индивидуалните рискове на активите, а ковариациите на техните възвръщаемости. Този извод може да се обоснове строго:

$$\sigma^2{}_p = \sum_{i=1}^{n} x_i[x_i\sigma_i^2 + \sum_{j=1}^{n} x_j \operatorname{cov}(r_i, r_j)].$$

Изразът в скобите може да се приеме като част от риска на портфейла „донесен" от *i*-тия актив.

$$\frac{x_i\sigma_i^2}{\sigma_p^2} + \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j \operatorname{cov}(r_i, r_j)}{\sigma_p^2}, i \neq j$$

Първата част на формулата е индивидуалният риск на портфейла, който не зависи от другите активи. Втората част зависи от другите активи. Колкото е по-голям рискът от взаимното движение на актива *i* и от всеки друг от останалите активи в портфейла (изразен с ковариацията), толкова е по-голям приносът на актива *i* към риска на целия портфейл. Числителят на втората част на формулата показва приноса на актива *i* към риска на портфейла в абсолютна стойност. За да получим относителната стойност разделяме на $\sigma^2{}_p$.

При един широко диверсифициран портфейл (индексния портфейл S&P500 например), първата част на горния израз може да се приеме приблизително за 0, защото теглото x_i на *i*-тия актив при голям брой активи в портфейла е много малко. Следователно, при добре диверсифицирани портфейли, значение за риска има само тази част от риска на отделния актив, т.е. ковариацията, описана във второто събираемо на формулата.

Теорията на Марковиц е първата стройна теория, даваща модел за оптимизиране на инвестиционни портфейли. Тя извежда формулите за очаквана възвръщаемост и риск на портфейл, като използва очакваната възвръщаемост на отделните активи. Въвежда понятието ефективна граница на капиталовия пазар, която представлява множеството от най-добрите възможности на пазара.

Теорията обаче има и известни несъвършенства:

1. Броят на котираните акции на съвременните фондови борси е толкова голям, че е много трудно извършването на всички изчисления на комбинациите с цел намиране на ефективната граница;
2. Практически е много трудно да се определи местоположението на ефективния портфейл върху ефективната граница;
3. Моделът не включва облигации, считани за безрискови активи;
4. Моделът минимизира целия риск на портфейла.

Модел на Тобин

През 1958 г. Джейм Тобин разработва модел за избор на портфейл, включващ безрискови активи. Като такива той използва краткосрочни (тримесечни) съкровищни бонове. Понякога като безрискови активи се приемат и останалите инструменти от паричния пазар: депозитни сертификати, търговски книжа, бонови акцепти и др.

Освен използването на безрисков актив, моделът на Тобин допуска още че:

- инвеститорите могат да влагат парите си в безрискови активи при лихвен процент r_F.
- инвеститорите могат да вземат неограничено пари на заем при сигурен лихвен процент r_b.

Портфейл, съставен от един рисков и един безрисков актив

Нека приемем, че портфейлът P съдържа рисков актив A с характеристики r_A и σ_A и безрисков актив F с $E_{rF} = r_F$ и $\sigma_F = 0$.

Полученият портфейл има следните характеристики:

$$E(r_P) = xE(r_A) + (1-x)r_F,$$
$$\sigma^2{}_P = x^2\sigma^2{}_A + (1-x)^2\sigma_F{}^2 + 2x(1-x)\sigma_A\sigma_F\rho_{AF}$$

Тъй като F е безрисков актив, равенството приема вида:

$$\sigma^2{}_P = x^2\sigma^2{}_A$$

Равенството за очаквана възвръщаемост може да се запише и така:

$$E(r_P) = r_F + \frac{E(r_A) - r_F}{\sigma_A}\sigma_P$$

и то показва как се изменя очакваната възвръщаемост на портфейла при промяна на пропорцията между рисковия и безрисковия актив. Същото равенство можем да запишем и по друг начин:

$$E(r_P) = r_F + [E(r_A) - r_F]x$$

По този начин изразяваме всички възможни комбинации “очаквана възвръщаемост / риск” на портфейла при промяна на съотношението между рисковия и безрисковия активи. Това е уравнение на права линия в зависимост от σ_P, известна в теорията на портфейла като рискова – безрискова граница.

Наклонът на правата е:

$$\lambda = \frac{E(r_A) - r_F}{\sigma_A}.$$

Разширение на портфейла чрез безрисков актив

Приемаме, че инвеститорът има възможност да избира между много рискови активи. Ако съществува възможност за използване на безрисков актив, то е възможно съставянето на портфейл от безрисков актив и ефективен рисков портфейл. Уравнението за очаквана възвръщаемост е същото, както в горната точка, като индексът *c* маркира ефективния рисков портфейл:

$$E(r_P) = r_F + \frac{E(rc) - r_F}{\sigma c}\sigma_P$$

Това уравнение се нарича *линия на разпределение на капитала (ЛРК)*. То изразява всички комбинации между очакваната възвръщаемост и риска на целия портфейл при промяна на съотношението между безрисковия актив *F* и рисковия портфейл *C*. Следователно ЛРК свързва всички комбинации риск/очаквана възвръщаемост, които удовлетворяват инвеститора, влагащ част от средствата си в безрисков актив, а останалата в ефективен рисков портфейл.

Наклонът на линията зависи от характеристичните очаквания за отношението "възвръщаемост / риск" на избрания портфейл. Инвеститорът трябва да избере този рисков портфейл от ефективната граница, при която линията на разпределението на капитала е най-стръмна. За този оптимален рисков портфейл ЛРК е допирателна към ефективната граница и наклонът ѝ е равен на наклона на ефективната граница:

$$\frac{E(r_M) - r_F}{\sigma_M} = \frac{\partial E(r_M)}{\partial \sigma_M}.$$

След определяне на оптималния рисков портфейл, следва разпределяне на рисковия и безрисковия дял. Това зависи от отношението на инвеститора към риска.

Разширение на портфейла чрез заем

Ако допуснем, че инвеститорът може да заема неограничени парични средства при лихвен процент r_b и че лихвените заемни плащания са сигурни, местоположението на така съставеният портфейл се намира отново върху ЛРК, но над точката, в която ефективната граница се допира до ЛРК.

Разширяване на портфейла чрез безрисков актив и заем

В този случай получената ефективна граница представлява начупена линия съставена от допирателната към ефективното множество на ЛРК при базрисков актив и тази при заем. При това положение практичността на портфейлната теория не се подобрява много, защото все още трябва да се разчита на познаването на множеството криви на безразличие на инвеститора, за да се определи кой портфейл от рискови активи трябва да се избере и какво да бъде съдържанието му.

Изложената ситуация е леко подобрена в сравнение с първоначалната, където не съществува нито вземане, нито даване на заем. Не е необходимо да се определя цялата ефективна граница, а само частта между двете точки на допиране. От тук следва, че колкото е по-малка разликата между лихвите за даване и вземане на заем, толкова е по-малък отрязъкът от първоначалната ефективна граница.

Линия на капиталовия пазар

Нека допуснем, че инвеститорът може да дава и взема заеми при еднакъв безрисков лихвен процент $r_B = r_F$. При това условие ефективната граница е права линия, допирателна към ефективното множество и минаваща през r_F. Тази права се нарича *Линия на капиталовия пазар (ЛКП)*. Случаят на допускане, че инвеститорите могат неограничено да ползват и дават заеми при безрисков лихвен процент е важен, защото тогава всички несклонни към риск инвеститори ще се интересуват само от портфейла М в точката на допиране. Той може да се определи като портфейл от рискови активи, които инвеститорът иска да притежава, без да се интересува от кривите на безразличие. Това е т. нар. *Разделителна теорема*.

ЛКП се представя чрез линейна функция, чието разположение може да се определи ако знаем само две точки: безрисковата възвръщаемост, очакваната възвръщаемост и рискът на рисковия портфейл *M*.

$$E(r_P) = r_F + \lambda\sigma_P,$$

където

$$\lambda = \frac{E(r_M) - r_F}{\sigma_M}$$

е пазарната цена на риска, а $П = \lambda\sigma_p$ е премията за риска.

Ако всички инвеститори са несклонни към риск, то те ще инвестират част или всичките си фондове в портфейла *M*. Това ще бъде единствената комбинация или портфейл от рискови инвестиции, които ще интересуват инвеститорите. Портфейлът *M* би следвало да се състои от акциите на всички компании, котирани на фондовата борса, заради което се нарича още *пазарен портфейл*.

Концепцията за пазарния портфейл определя равновесната пазарна цена. Ако той съдържа акциите на всичко котиращи се компании, то пазарните цени на техните акции трябва да са приемливи за включване в пазарния портфейл. Или казано по друг начин, цените на акциите са в равновесие, когато притежават очаквана възвръщаемост, достатъчна за компенсация на риска.

Интерес представлява наклонът на ЛКП λ, изразяващ връзката “риск / очаквана възвръщаемост” на капиталовия пазар. λ показва премията, която пазарът осигурява за поемане на риска.

Равенството за очакваната възвръщаемост дава очакваната възвръщаемост на всеки ефективен портфейл (от ЛКП), равна на безрисковата възвръщаемост r_F плюс рисковата премия $\lambda\sigma_p$. Премията зависи от риска на портфейла и цената на пазарния риск. Тя от своя страна показва възвръщаемостта, която може да се очаква за всеки 1% риск σ_p на пазарния портфейл. Но тъй като пазарният портфейл е максимално диверсифициран, рискът който той съдържа, не може да се елиминира чрез диверсификация. За това пазарната цена на риска λ показва очакваната възвръщаемост, осигурена от пазара за всеки 1% недиверсифициран риск. ЛКП обаче, се отнася само за ефективни инвестиционни портфейли, а не за индивидуални активи.

Разделителната теория, заложена в основата на модела на Тобин е приложение на финансовия лост в инвестирането, но той съдържа и редица несъвършенства, които пречат на приложението му в инвестиционната практика. Тези недостатъци произтичат от нереалистичността на двете основни понятия: *безрисков актив* и *пазарен портфейл*. На практика не съществува абсолютно безрисков актив. Определянето на пазарния портфейл е също невъзможно. Проблематично също е и допускането за безрисково вземане на заем.

Моделът не отразява спекулативните очаквания на инвеститорите, които се стремят да бъдат оригинални, а ги унифицира.

От друга страна обаче, моделът на Тобин е изходно начало за развитието на най-разпространения модел за портфелиране – Модела за оценка на капиталовите активи (CAPM).

Модел за оценка на капиталовите активи (CAPM)

От идеята за ЛКП следва заключението, че капиталовите пазари показват линейна зависимост между риска и очакваната възвръщаемост:

$$E(r_p) = r_F + \lambda\sigma_p.$$

Анализите сочат, че зависимостта не е резултат от общия риск на индивидуалните инвестиции, а само на част от този риск. Пазарът не може да осигури премия за тази част от риска, която може да се неутрализира чрез диверсификация.

CAPM също е свързан с много нереалистични предположения, но е приложим. Той позволява да се направят значителни изследвания на факторите, свързани с определяне цените на акциите. От голямо значение е също и прогностичната сила на модела.

CAPM се основава на базисния модел на Марковиц, като прави някои нови предположения, а други изоставя. Както в модела на Тобин, CAPM допуска съществуването на безрискови активи и свободното предоставяне и вземане на заеми при безрискова ставка. Допускат се къси продажби на рискови активи. Останалите предположения от модела на Марковиц се запазват.

Допълнителни предположения на CAPM:

1. капиталовите пазари са в равновесие. Наличието на равновесни цени предполага липса на спекулативно търсене и предлагане;
2. информацията е напълно свободна и всички имат равнопоставен достъп до нея;
3. всички инвеститори имат еднакви очаквания т.е. всички анализират наличната информация еднакво.

Линия на пазара на ценни книжа (ЛПЦК)

От формулата за очаквана възвръщаемост на ефективния портфейл:

$$E(r_p) = r_F + \lambda\sigma_p,$$

където рискът на портфейла се състои от недиверсифицирания риск на пазарния портфейл, можем да получим формулата за възвръщаемостта на неефективната инвестиция:

$$E(r_s) = r_F + \lambda\sigma_s\rho_{sm}$$

Това е уравнението на Линията на пазара на ценни книжа ЛПЦК.

Сравнявайки горните две уравнение се вижда, че ЛКП е тясно свързана с функцията на ЛПЦК. Уравнението на първата показва, че възвръщаемостта на ефективния портфейл се състои от два елемента – възвръщаемост на безрисковата инвестиция и обща възвръщаемост, която може да се очаква като премия за рисковата инвестиция. Рисковата премия е резултат от пазарната цена на риска λ и поетият риск на даден ефективен портфейл σ_p. Пазарният портфейл е диверсифициран и следователно пазарната премия е само за недиверсифицирания риск.

От израза за ЛПЦК се вижда, че както при ЛПК, очакваната възвръщаемост на акциите се състои от два елемента – безрискова възвръщаемост и рискова премия. Тук рисковата премия не зависи само от пазарната цена на риска λ, но и от инвестиционния риск σS. Множителят $\sigma_s\rho_{sm}$ представлява недиверсифицираният риск на акциите S. Рисковата премия се базира само на частта от общия риск, който не може да бъде диверсифициран.

Систематичен и несистематичен риск

Недиверсифицируемият риск на един актив се нарича още систематичен, а диверсифицируемият – несистематичен риск.

Функцията на ЛПЦК изразява възвръщаемостта, която инвеститорът очаква от всяка неефективна инвестиция при определено ниво на систематичен риск. Тази зависимост е известна като CAPM.

$$E(r_k) = r_F + \lambda\sigma_k\rho_{km},$$

което означава, че възвръщаемостта, която може да се очаква от инвестицията в акции на компанията K е равна на безрисковата възвръщаемост плюс рисковата премия. Рисковата премия се определя от пазарната цена на систематичния риск и от нивото на този риск за акциите на K. CAPM дава връзката между инвестиционния систематичен риск и очакваната възвръщаемост. Нивото на възвръщаемост зависи от степента на корелация между рисковия актив и пазарния портфейл.

Приложението на CAPM към инвестиционни проекти е от значение при установяване на източника или причината за систематичния или несистематичния риск. Тъй като рискът е свързан с промените във възвръщаемостта на акциите, а тя от своя страна с движението на пазарните цени и нивото на дивидентите, определянето на риска е идентично с определянето на движението на цените на акциите и нивото на дивидентите. Цените на акциите и дивидентите се определят от размера на фирмените парични потоци, следователно общият риск на компанията се определя от колебанията на нейните парични потоци.

β коефициент

Когато капиталът е в равновесие, ние знаем ЛПЦК.

$$E(r_j) = r_F + \frac{E(r_M) - r_F}{\sigma_M}\sigma_j\rho_{jM}.$$

Полагаме

$$\beta_j = \frac{\sigma_j \rho_{jM}}{\sigma_M}$$

и заместваме:

$$E(r_j) = r_F + [E(r_M) - r_F]\beta_j$$

Това е основната зависимост на CAPM. Числителят на коефициента β се явява измерител на систематичния риск на акцията, а знаменателят – на общия риск на пазарния портфейл. Следователно коефициентът β е отношението между систематичния риск на акциите и риска на пазарния портфейл.

Коефициентът β е показател на еластичността на финансовите активи по отношение на ценовата динамика на пазарите на ценни книжа. Той може да приема различни стойности:

1. $\beta = 1$ активът притежава характеристиките на пазарния портфейл и се развива заедно с него в еднаква степен, посока и сила;
2. $\beta > 1$ възвръщаемостта на актива се променя в същата посока, но с по-голяма сила от пазарния портфейл;
3. $0 < \beta < 1$ възвръщаемостта на актива се променя в същата посока, но с по-малка сила;
4. $\beta = 0$ няма зависимост между възрвъщаемостите (безрисков актив);
5. $\beta < 0$ посоката на промяна е обратна на тази на пазарния портфейл.

Ценна книга с $\beta > 1$ внася повече риск в портфейла, отколкото е рискът на самия пазарен портфейл, т.е. действа агресивно. В обратния случай тя ще внася по-малко риск отколкото е рискът на пазарния портфейл, т.е. действа дефанзивно.

Ако CAPM е верен, несистематичният риск не носи премия. По-голяма възвръщаемост на портфейла може да се получи само при по-висок портфейлен риск (при портфейл с по-големи β)., т.е. при внасянето на по-агресивни ценни книжа.

CAPM се прилага за котиране на акции на фондовата борса. Формулата му определя равновесната норма на очакваната възвръщаемост, която една акция би трябвало да има. Така, чрез модела може да се определи дали една акция е подценена или надценена.

Основният метод за анализиране на β коефициента на една акция е статистическият:

- събират се исторически данни за възвръщаемостта на акцията за определен период от време;
- за същия период се събират данни за един индекс на широка база, който играе ролята на пазарен портфейл;
- чрез регресионен анализ се търси зависимостта между възвръщаемостта на актива и индекса. Наклонът на получената регресионна (характеристична) линия е оценката за β на актива.

Регресионната линия изразява зависимостта между очакваната възвръщаемост на даден актив и тази на пазарния портфейл (дава се от основното уравнение на CAPM). Наклонът на линията е графичното изображение на β и е $\beta = \text{tg}\varphi$.

При $\varphi = 45^0$, $\beta = 1$ и това означава, че промяната на рисковата премия на пазара води до същата по посока и сила промяна на рисковата премия за разглежданата акция.

При $\varphi = 0^0$, линията е хоризонтална – акцията има характер на безрисков актив. Отрезът на линията от вертикалната ос е графичен израз на α.

CAPM предполага, че информация е достъпна за всички участници на пазара и че те постепенно коригират своите оценки. Те започват да купуват подценените акции и тяхната цена се повишава, а продават надценените акции и като следствие цената им пада. Тази спекулативна търговия ще доведе до ново равновесие на пазара, докато оценките на отделните инвеститори и тези на пазара се изравняват. Според хипотезата за ефективния пазар, цените на активите отразяват пълно наличната за тях информация. Следователно колкото α е по-голяма, толкова пазарът е по-неефективен. Отчитайки коефициентът α формулата на CAPM приема вида:

$$E(r_j) = r_F + \alpha_j + \beta_j[E(r_M) - r_F].$$

Реалните данни за рисковата премия на дадена ценна книга се отклоняват от оценката, която дава CAPM за нея според горното равенство, като отклонението ξ_j е случайно, положително в един период и отрицателно в друг. Поради тази причина това уравнение може да се трансформира:

$$E(r_j) = r_F + \alpha_j + [E(r_M) - r_F]\beta_j + \varepsilon_j.$$

Отклонението (грешката) ε_j се дължи на несистематичния риск и очакваната му стойност е $E(\varepsilon) = 0$.

CAPM прави допускане за силно ефективен пазар, като в горната формула се пропуска α_j, което дава възможност да се определи рискът на възвръщаемостта на отделния актив:

$$\sigma^2{}_j = \beta^2\sigma^2{}_M + \sigma^2{}_\varepsilon$$

При $\sigma^2{}_F = 0$ (за безрисковия актив) формулата показва, че рискът на един актив се разделя на две части:

- диверсифицируем (несистематичен), изразен с σ^2_ε . Той показва как реалната норма на възвръщаемост се отклонява от очакваната през различните периоди. Отклонението е случайно и инвеститорът не може да му въздейства. Срещу него може да се прилага диверсификация и отклоненията да се неутрализират;
- недиверсифицируем (систематичен) риск, изразен с $\beta^2\sigma^2{}_M$. Той е обусловен от функционирането на икономиката като цяло и инвеститорът не може да му влияе, а само да го оценява.

Недостатъците на CAPM са свързани главно с нереалността на понятията пазарен портфейл и безрисков актив. Въпреки това CAPM е основа за оценка на активите. Той дава насоки на съвременните технологии при конструиране на инвестиционни портфейли и най-вече въвежда нов измерител на риска коефициентът β, отразяващ систематичния риск на инвестиционните носители.

Арбитражна теория за ценообразуване

Арбитражната теория (AT), както и CAPM, е равновесна теория за връзките между очакваната възвръщаемост на акциите и качествата им. За разлика от CAPM, AT моделира възвръщаемостта чрез факторен модел. Различава се и по това, че не прави строги предположения за предпочитанията на инвеститорите. Основната теза на AT е, че ако съществуват два актива с еднакъв риск и различна възвръщаемост, то участниците на пазара чрез покупки и продажби (арбитраж) ще повлияят на възвръщаемостта на двата актива в посока изравняване. Такава ситуация на нарушено равновесие не може да съществува дълго време, защото чрез къси продажби на активи с по-ниска възвръщаемост и покупки на тези с по-висока (за същата сума) ще се реализират печалби при нулев риск и без влагане на собствени средства. Освен, че арбитражът гарантира равновесието на пазара, той дава възможност да се формулира модел на очакваната възвръщаемост на отделния актив.

Ако на капиталовия пазар влияят M фактори F_j, $j = 1, \ldots, M$ и връзката между тях и възвръщаемостта R_i на акциите е (уравнение на многофакторния модел, се разглежда по-долу):

$$\widetilde{R}_i = a_i + b_{i1}\widetilde{F}_1 + b_{i2}\widetilde{F}_2 + \ldots + b_{iM}\widetilde{F}_M + \widetilde{e}_i$$

При условие, че разполагаме с голямо количество акции с различна чувствителност към факторите е възможно изграждането на портфейл, който:

- е чувствителен към един фактор;
- не е чувствителен към всички останали фактори;
- е добре диверсифициран и следователно специфичната възвръщаемост на акциите може да се пренебрегне *($E_{ep} = 0$)*.

Това винаги е възможно с помощта на къси продажби.

$\mathrm{F_j}$ се нарича чист факторен *j* портфейл:

$$\widetilde{R}_p = a_p + b_{pj}\widetilde{F}_j$$

Ако чувствителността на портфейла към фактора е единица *($b_{pj} = 1$)* то *единичният факторен j портфейл* е:

$$\widetilde{R}_p = a_p + \widetilde{F}_j$$

Практически тази теоретична постановка може да се приложи като се построи портфейл, чувствителен предимно към един фактор и имащ сравнително малък специфичен риск.

Очакваната възвръщаемост на чистия факторен портфейл зависи от очакваната величина на съответния фактор. Тя може да се раздели на две части: безрискова норма на възвръщаемост *(R_f)* и рискова премия ($b_{pj}\lambda_j$: λ_j – премия за единица чувствителност b_{pj}), от където следва:

$$R_p = R_f + b_{pj}\lambda_j,$$

$$R_p = R_f + \lambda_j$$

Възможно е конструирането на различни чисти *j* факторни портфейли, но те ще имат еднаква очаквана възвръщаемост, поради възможността за арбитраж.

С помощта на безрисков актив и факторни портфейли е възможно получаването на голям брой портфейли с различна чувствителност към факторите и с незначителен специфичен риск. Възможно е конструирането на портфейл *K* с чувствителност, идентична с тази на дадена акция *к*. Единствената разлика между тях ще бъде рискът, свързан със специфичната възвръщаемост на акцията. Тогава арбитражът ще гарантира, че очакваната възвръщаемост на акцията ще бъде близка до тази на портфейла *K*, от където следва основното уравнение в АТ, което се нарича още *оценяващо уравнение*:

$$E_k \approx R_f + b_{k1}\lambda_1 + b_{k2}\lambda_2 + \ldots + b_{kM}\lambda_M$$

С негова помощ може да се определи очакваната възвръщаемост на единичен актив, което е основната задача на АТ.

Подобно на САРМ и тук се разглежда линейната връзка между очакваната възвръщаемост и различните определящи характеристики на акциите. В АТ тези характеристики са чувствителността към главните действащи фактори.

Това, което отличава АТ от CAPM е, че тя не използва абстрактното понятие пазарен портфейл. АТ също така не прави допускания относно факторите, които въздействат върху цените на активите. Тя приема, че това влияние е отразено в цените и ако има отклонение от равновесните цени, арбитрите ще ги отстранят чрез покупки и продажби. Акцентът пада върху арбитража, като предпоставка за равновесието на пазара и като необходимо условие за определяне на действителната равновесна цена на актива.

Едно от затрудненията при прилагането на АТ е идентифицирането на факторите и тяхното въздействие върху възвръщаемостта и цените.

Трябва да се отбележи, че тази теория не засяга проблема за размера на рисковата премия λ_j. Нейното определяне става с CAPM.

АТ и CAPM

Ако възвръщаемостта на актива *i* се дефинира чрез *M* - факторен модел, то β може да се определи по следния начин:

$$\widetilde{R}_i = a_i + b_{i1}\widetilde{F}_1 + b_{i2}\widetilde{F}_2 + \ldots + b_{iM}\widetilde{F}_M + \widetilde{e}_i.$$

Ковариацията на *Ri* с възвръщаемостта на пазарния портфейл ще бъде:

$$\operatorname{cov}(R_i, R_m) = b_{i1}\operatorname{cov}(F_1, R_m) + b_{i2}\operatorname{cov}(F_2, R_m) + \ldots + b_{iM}\operatorname{cov}(F_M, R_m) + \operatorname{cov}(e_i, R_m),$$

следователно:

$$\beta_i = \frac{\operatorname{cov}(R_i, R_m)}{\sigma_m} = b_{i1}\frac{\operatorname{cov}(F_1, R_m)}{\sigma_m} + \ldots + b_{iM}\frac{\operatorname{cov}(F_M, R_m)}{\sigma_m} + \frac{\operatorname{cov}(e_i, R_m)}{\sigma_m}.$$

Последното събираемо може да се игнорира, защото клони към 0, а

$$\frac{\operatorname{cov}(F_j, R_m)}{\sigma_m} = \beta_{Fj}$$

е чувствителността на фактора F_j към промените на пазара (или обратно) и формулата за определяне на β при факторни модели приема вида:

$$\beta_i \approx b_{i1}\beta_{F1} + b_{i2}\beta_{F2} + \ldots + b_{iM}\beta_{FM},$$

следователно β коефициентът на акция (или портфейл) е средна претеглена на β коефициентите на съответните фактори, а теглата са чувствителностите на акциите (портфейла) към тези фактори.

При CAPM възвръщаемостта не се определя от факторен модел, но това не го прави несъвместим с теориите, използващи факторни модели. Оригиналният CAPM приема, че възвръщаемостта на акциите е свързана с техните β:

$$E(r_j) = r_F + [E(r_m) - r_F]\beta_j$$

Ако възвръщаемостта се дефинира с *M* факторен модел, β коефициента на *i*-тата акция ще се изчисли от нейната чувствителност към факторите F_i и съответните β коефициенти:

$$\beta_i \approx b_{i1}\beta_{F1} + b_{i2}\beta_{F2} + \ldots + b_{iM}\beta_{FM}.$$

От това следва:

$$E(r_i) = r_F + b_{i1}[E(r_m) - r_F]\beta_{F1} + b_{i2}[E(r_m) - r_F]\beta_{F2} + ... + b_{iM}[E(r_m) - r_F]\beta_{FM}$$

Сравнявайки основното уравнение на AT и горното уравнение, при условие, че AT и CAPM са приложими, получаваме:

$$\left| \begin{array}{l} \lambda_1 = [E(r_m) - r_F]\beta_{F1} \\ \lambda_2 = [E(r_m) - r_F]\beta_{F2} \\ ... \\ \lambda_M = [E(r_m) - r_F]\beta_{FM} \end{array} \right.$$

Както беше отбелязано по-горе, AT не разглежда проблема за величината на рисковата премия на единица чувствителност *(λ_j)*, но с помощта на CAPM може да се получи точна оценка на тази величина. Според нея ще има положителна премия при фактори, движещи се с пазара и отрицателна премия при фактори, движещи се срещу пазара. Колкото по-голяма е степента, с която факторът се движи с пазара, толкова по-голяма е премията.

При това разширяване на факторния модел, AT и CAPM взаимно се допълват. Комбинирани, двете теории са много силни. Те правят по-точни прогнози, а точността на прогнозите е главен критерий за оценка на приложимостта им, където очакваните стойности са основните резултативни величини.

В икономиката се наблюдават фундаментални, широко въздействащи фактори, въздействащи на фирмите в различна степен. Тези фактори влияят пряко върху цените на акциите, които се променят в зависимост от чувствителността си.

Целта на портфейлния анализ е да идентифицира главните фактори в икономиката и да определи чувствителността на цените на акциите към промените в инвеститорските очаквания за бъдещите равнища на тези фактори. Формалният модел на тази зависимост се нарича *факторен модел* за възвръщаемостта на ценните книжа.

Еднофакторен модел

При еднофакторните модели на възвръщаемост на ценните книжа се приема, че всеки актив търпи въздействието на един основен фактор. Чувствителността на актива i към промените на фактора F се бележи с b_i. Всяка акция се характеризира с две допълнителни величини:

- a_i – очаквана възвръщаемост, когато факторът има стойност нула ($F = 0$), и
- σ_{ei} – нефакторен риск на акцията (специфичен риск, характерен за конкретна компания и несвързан с фундаменталния фактор).

Формалният еднофакторен модел има вида:

$$\widetilde{R}_i = a_i + b_i\widetilde{F} + \widetilde{e}_i,$$

където:

- $\widetilde{R}i$ е възвръщаемост на актива *i,*
- $\widetilde{F}$ е стойност на фактора,
- $\widetilde{e}i$ е специфична възвръщаемост на актива,
- *ai, bi* са константи.

Величините, означени с ~ , имат несигурна бъдеща стойност.

Приема се, че очакваната стойност на специфичната възвръщемост на актива е нула $(E_{ei}= 0)$, а a_i включва очакваният размер на нефакторната възвръщаемост, b_i включва пълната чувствителност на възвръщаемостта на актива към промените на фактора т.е. e_i е некорелирана с F.

При използване на модела се направят следните предварителни оценки:

- За фактора:
    - E_F – очаквана стойност;
    - σ_F – стандартно отклонение.
- За всяка акция:
    - a_i – нефакторна възвръщаемост;
    - b_i – чувствителност към фактора;
    - σ_{ei} – стандартно отклонение на e_i.

Очакваната възвръщаемост и рискът на актива могат да бъдат определени:

$$E(\widetilde{Ri})E_i = a_i + b_iE_F$$

$$\sigma_i^2 = b_i^2\sigma_F^2 + \sigma_{ei}^2$$

Еднофакторният модел много прилича на САРМ. Разликата се състои в това, че тук факторът определящ възвръщаемостта не е назован, докато при САРМ той изрично е посочен – пазарната премия. Еднофакторният модел е твърде опростено отражение на действителността, но той се използва за изследване на резултата от диверсификацията на портфейлните.

При комбиниране на активи, зависими от един и същи фактор се получава портфейл, за който:

$$\widetilde{R}_p = \sum_{i=1}^{N} x_i\widetilde{R}_i,$$

Където x_i е делът на актив i в портфейла p. Използвайки уравнението на модела:

От тези уравнения може да се направят изводи за резултата от диверсификация:

$$\widetilde{R}_p = \sum_{i=1}^{N} x_i(a_i + b_i\widetilde{F} + \widetilde{e}_i) = a_p + b_p\widetilde{F} + \widetilde{e}_p,$$

$$a_p = \sum_{i=1}^{N} x_ia_i, b_p = \sum_{i=1}^{N} x_ib_i, \widetilde{e}_p = \sum_{i=1}^{N} x_i\widetilde{e}_i.$$

Извод 1: Диверсификацията води до осредняване на обвързания с фактора риск (b_p). Съвсем различна е ситуацията по отношение на необвързания фактор. Сумарният ефект от движението на цените на акциите оказва незначително влияние върху специфичния риск. При некорелиран специфичен риск, това може да се запише по следния начин:

$$\sigma_{ep}^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sigma_{ei}^2$$

ако x_i = const = 1/N, то:

$$\sigma_{ep}^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{N}\right)^2 \sigma_{ei}{}^2 = \frac{1}{N}\left[\frac{\sum_{i=1}^{N} \sigma_{ei}^2}{N}\right].$$

Изразът в скобите е средният специфичен риск, измерен чрез вариацията на възвръщаемостите на акциите в портфейла. Колкото е по-голям броят N на акциите, толкова е по-малък специфичният риск.

Извод 2: Диверсификацията може съществено да намали специфичния риск на инвестицията.

Факторните модели са изградени на твърдия принцип, че всички източници на корелация между възвръщаемостите на активите са отразени в a_i и b_i. За това се допуска, че специфичните възвръщаемости на активите e_i на практика са некорелирани и от диверсификацията следва, че *за силно диверсифицирани портфейли, специфичният риск на активите е достатъчно малък и може да се приеме за незначителен.*

Многофакторни модели

Общият вид на многофакторния модел е:

$$\widetilde{R}_i = a_i + b_{i1}\widetilde{F}_1 + b_{i2}\widetilde{F}_2 + ... + b_{iM}\widetilde{F}_M + \widetilde{e}_i$$

където M е броят на факторите. Това е M-факторен модел на възвръщаемост. За прилагането му следва да се направят няколко предварителни оценки:

- за всяка акция $M + 2$ предварителни оценки (a_i, b_{i1}, …, b_{iM}, e_i, $i = 1, 2, …, N$);
- за всеки от факторите 2 предварителни оценки (EF_j, σ_{Fj}, $j = 1, 2, …, M$);
- $M(M - 1)/2$ корелационни оценки между факторите.

Общият брой на предварително изчислените коефициенти е $(M+2)N+2N+ M(M-1)/2$.

И тук е в сила допускането:

- очакваната стойност на специфичната възвръщаемост на всички акции е нула
  ($E_{ei} = 0$, $i = 1, …, N$);
- специфичната възвръщаемост на акциите е некорелирана с факторите
  ($\rho\,(e_i, F_j) = 0$, $i = 1, …, N$, $j = 1, …, M$);
- специфичните възвръщаемости на акциите са некорелирани една с друга
  ($\rho\,(e_i, e_j) = 0$, $i, j = 1, …, N$).

И тук са валидни трите твърдения за ефекта на диверсификацията, формулирани в еднофакторния модел.

Многофакторният модел демонстрира по-добра способност за прогнозиране на очакваната възвръщаемост на индивидуалния актив, защото включването на повече фактори дава възможност за по-точно моделиране на процеса на генериране на възвръщаемост. Проблем възниква при идентифициране на въздействащите фактори. Възможно е някои от тях да са корелирани (което е доста често явление). За това, при прилагане на модела, основните задачи са:

- определяне на подходящ факторен модел – брой и конкретен избор на факторите;
- пресмятане на необходимите величини.

Основни изводи на класическата портфейлна теория

Класическата теория на портфейлите има три етапа на развитие. Първият етап е първична разработка на математическите основи на портфейлната теория. Вторият етап – създаване на теорията на пазарния портфейл в трудовете на Марковиц, Тобин и Шарп. Третият етап е формиране на теория на оптималния портфейл на база теорията на пазарния портфейл в трудовете на Модилиани, Милер, Блек и Шолс.

Днес основните изводи на класическата портфейлна теория могат да се формулират по следния начин:

1. Ефективното множество съдържа онези портфейли, които едновременно осигуряват максимална очаквана доходност при фиксирано ниво на риска и минимален риск при дадено ниво на очаквана доходност.
2. Предполага се, че инвеститорът ще избере оптималният портфейл измежду портфейлите от ефективното множество.
3. Оптималният портфейл на инвеститора се идентифицира от допирателната точка на кривите на безразличие на инвеститора с ефективното множество.
4. Диверсификацията обикновено води до намаляване на риска, а стандартното отклонение на портфейла в общия случай ще е по-малко, отколкото средно претегленото стандартно отклонение на ценните книги съставящи портфейла.
5. Съотношението доходност на ценната книги и доходността й към индекса на пазара е известно като пазарен модел.
6. Доходността на ценната книга към пазарния индекс не отразява напълно доходността на ценната книга. Необяснените елементи се включват в случайната грешка на пазарния модел.
7. В съответствие с пазарния модел общият риск на ценната книга се състои от специфичен и неспецифичен риск.
8. Диверсификацията води до усредняване на неспецифичния риск.
9. Диверсификацията може значително да намали специфичния риск.

По този начин може да се формулират следните основни постулати, върху които се гради класическата портфейлна теория:

1. Пазарът се състои от краен брой активи, доходността на които за даден период е случайна величина.
2. Инвеститорът може да получи оценка на очакваните средни значения на доходността и двойките им ковариации – степени на възможността за диверсификация на риска, напр. изхождайки от статистически данни.
3. Инвеститорът може да формира произволни допустими (за дадения модел) портфейли. Доходността на портфейлите също е случайна величина.
4. Сравнението на избраните портфейли се базира само върху два критерия – средна доходност и риск.
5. Инвеститорът не е склонен да рискува в смисъл, че от два портфейла с еднаква доходност той винаги предпочита портфейлът с по-малък риск.

На практика стриктното спазване на тези постулати е много проблематично, но оценката на портфейлната теория би трябвало да се базира не само върху степента на адекватност на изходните постулати, а и върху резултатността на задачите за управление на инвестициите, получени с нейна помощ.

Тема 3. Анализ на риска и възвръщаемостта

Риск и възвръщаемост на една инвестиция

Възвръщаемостта е частно (дроб). В числителя е размерът на очакванията (реализираният доход) от купони, дивиденти, печалба, нетен паричен поток и т.н. от една инвестиция. В знаменателя е стойността, за която е купена (придобита) тази инвестиция.

Например, ако става дума за акция, възвръщаемостта можем да я представим по следния начин:

$$R_{\text{акция}} = \frac{d + \Delta V}{S_0} = \frac{d + F - S_0}{S_0};$$

където:

- F е пазарна/борсова цена на акцията в момента;
- d е дивидент.

Пресметнете $R_{\text{акция}}$, чиято цена се е покачила от 1000 на 1100 лв. и осигурява дивидент 120 лв.

$$R_{\text{акция}} = \frac{120 + 1100 - 1000}{1000} = 22\%.$$

За минали периоди може да се изчисли средната възвръщаемост:

$$\overline{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Ri}{n},$$

където:

- n е броят на годините, за които имаме данни за възвръщаемостта на тази инвестиция;
- Ri е стойността на възвръщаемостта за всяка година.

Рискът в ежедневието най-често се определя като вероятност за настъпване на нещо нежелано, нещо, което ни кара да се чувстваме дискомфортно. Рискът на една инвестиция е отклонението на действителната (реалната) от очакваната (желаната) възвръщаемост на една инвестиция, че се измерва със средноквадратичното отклонение.

Пример № 1. Класически литературен пример за определяне на риска и възвръщаемостта на една инвестиция: Нека имаме например проект А, който е възможно в бъдеще да попадне в различни икономически ситуации (сценарии). Приемаме, че ситуациите са шест. Известни са Ri и pi за всяка ситуация. Построяваме следната основна таблица.

№	Икономическа ситуация $i = 1 \div 6$	Ri	pi	$Ri.pi$	$(Ri - \overline{R})^2.pi$
1	Криза	-15	0.12	-1.8	49.2075
2	Стагнация	-2	0.2	-0.4	10.5125
3	Начално развитие	+2	0.2	0.4	2.1125
4	Оживление	+10	0.3	3	6.768

5	Подем	+18	0.15	2.7	24.384
6	Бум	+45	0.03	1.35	47.40188
			$\sum=1$	$\overline{R}=5.25$	$\sigma^2=140.3875$

$\sigma=\sqrt{\sigma^2}=11.8485\%$ **- стойност на риска.**

Задължително се оценява проект А по следните пет критерии:

1. Критерий, свързан с математическото очакване на възвръщаемостта:

   Знае се, че $\sum_{i=1}^{n} pi=1$, pi – вероятност за сбъдване на *i*-тата икономическа ситуация.

   Тогава $\overline{R}=\sum_{i=1}^{n} Ri.pi \rightarrow \max$.

2. Критерий за риска като средноквадратично отклонение:

   $$\sigma=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Ri-\overline{R})^2.pi}=11.8485\% \rightarrow \min.$$

3. Размах (ранг) на вариацията в абсолютни величини:

   $$R_{ABS}=V_{абс}=R_{\max}-R_{\min}=60\% \rightarrow \min.$$

4. Размах (ранг) на вариацията в относителни величини:

   $$R_{REL}=V_{отн}=\frac{R_{\max}-R_{\min}}{\overline{R}}=\frac{60}{5.25}=11.4286\% \rightarrow \min.$$

5. Вариационен коефициент, коефициент на вариация, CV:

   $$CV=V_{\sigma}=\sigma\%=\frac{\sigma}{\overline{R}}.100=\frac{11.8485}{5.25}=225.6857\% \rightarrow \min.$$

Анализът на всяка инвестиция се определя от следните всички пет критерия. Ако трябва да се сравнят например четири проекта (A, B, C, D), се строи следната спомагателна таблица:

Проект	$\overline{R}$	σ	R_{ABS}	R_{REL}	CV
A	5.25%	11.8485%	60%	11.4286%	225.6857%
B	6.1%	14.56%	76%	12.459%	238.6885%
C	12.46%	11.9654%	64%	5.1364%	96.0305%
D	3.9645%	12.7623%	70%	17.6567%	321.6623%

За практически анализи много често вариационният коефициент служи за определяне на това кой проект да изберем.

- По същество той изразява рисковаността на инвестицията за единица възвръщаемост (доходност).
- Този проект, който е с най-нисък CV, е най-предпочитан. В случая това е проектът C. Проектите могат да се подредят така:

C > A > B > D.

Риск и възвръщаемост на портфейл

Нека се разгледа един модел, който може да бъде определен като **предварителен (наивен) модел** или модел за експресен анализ на портфейл.

Може да се припомни, че *портфейл* е съвкупност от различни финансови активи. Възвръщаемостта на портфейла може да се определи от следните три израза:

1. $ERp = \sum_{i=1}^{n} Ri.Ki$.
2. $\sigma p = \sum_{i=1}^{N} \sigma i.Ki$. ***Това равенство е вярно само като частен случай!***
3. $\sum_{i=1}^{N} Ki = 1$,

където:

- N е броят на всички активи, които са включени в портфейла ($i = \overline{1, N}$)
- Ki е относителният дял на участие на i-тия актив в портфейла, който се определя от инвеститора.

Знаем стойностите на Ri и σi.

<u>**Пример № 2:**</u> Нека разгледаме по литературни данни „американски“ портфейл, състоящ се от 6 финансови актива. Всички тези активи имат изчислени средно геометрични стойности за 62 години.

№	Финансов актив	Ri %	σ_i %	Относителен дял Ki		ER_p %		σ_p %	
				I вариант	II вариант	I вариант	II вариант	I вариант	II вариант
1	Обикновени акции	10	21.1	0.1	0.4	1	4	2.11	8.44
2	Акции на малки компании	12.3	34.9	0	0.5	0	6.15	0	17.45
3	Дългосрочни корпоративни облигации	5	10	0.2	0.05	1	0.25	2	0.5
4	Дългосрочни правителствени облигации	4.4	10.1	0.3	0	1.32	0	3.03	0
5	Средносрочни правителствени облигации	4.8	7	0.2	0.05	0.96	0.24	1.4	0.35
6	Съкровищни бонове на САЩ	3.5	4.4	0.2	0	0.7	0	0.88	0
				∑=1	∑=1				

ERp I % =	4.98	ERp II % =	10.64
σ_p I % =	9.42	σ_p II % =	26.74

Коефициент на вариация →	$CV^{I} =$	189.156%	$CV^{II} =$	251.315%

Тогава може да предпочетем I вариант на портфейла, тъй като $CV^{I} < CV^{II}$.

Трябва да се отбележи, че максималната възвръщаемост на портфейла е 12.3, т.е. портфейлът е ограничен от 12.3 (Акции на малки компании) и риск не по-малък от 4.4 (Съкровищни бонове на САЩ).

<u>Пример № 3.</u> Да се намери „оптималното“ решение за „американския“ портфейл от предния пример № 2, като се включат само три актива.

Как може да се търси „оптимално“ решение само с три актива?

Съставяме линейна система с три неизвестни x, y, z.

Относителният дял на активите Ki задължително принадлежи в интервала от 0 до 1, което означава, че $x, y, z \in [0; 1]$. Нека да разгледаме три варианта на решение.

Първи вариант на решение:

Избираме относителните дялове съответно за:

- Обикновени акции – x;
- Акции на малки компании – y;
- Дългосрочни корпоративни облигации – z.

Тогава линейната система от три уравнения с три неизвестни е от вида:

$$\left| \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 10x + 12.3y + 5z = 9.1 \\ 21.1x + 34.9y + 10z = 22 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} z = 1 - x - y \\ 10x + 12.3y + 5(1 - x - y) = 9.1 \\ 21.1x + 34.9y + 10(1 - x - y) = 22 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} z = 1 - x - y \\ 5x + 7.3y = 4.1 \\ 11.1x + 24.9y = 12 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} z = 1 - x - y \\ x = (4.1 - 7.3y) / 5 \\ 11.1x + 24.9y = 12 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} z = 1 - x - y \\ x = (4.1 - 7.3y) / 5 \\ 11.1[(4.1 - 7.3y) / 5] + 24.9y = 12 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} z = 1 - x - y \\ x = (4.1 - 7.3y) / 5 \\ 8.694y = 2.898 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow y = 0.33;$
$\Rightarrow x = (4.1 - 7.3*0.33) / 5 = 0.338;$
$\Rightarrow z = 1 - 0.33 - 0.338 = 0.332.$

Втори вариант на решение:

$$\left|\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 5x + 4.8y + 3.5z = 4.4 \\ 10x + 7y + 4.4z = 7.1 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} z = 1 - x - y \\ 5x + 4.8y + 3.5(1 - x - y) = 4.4 \\ 10x + 7y + 4.4(1 - x - y) = 7.1 \\ z = 1 - x - y \\ 1.5x + 1.3y = 0.9 \\ 5.6x + 2.6y = 2.7 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} z = 1 - x - y \\ x = (0.9 - 1.3y) / 1.5 \\ 5.6[(0.9 - 1.3y) / 1.5] + 2.6y = 2.7 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} z = 1 - x - y \\ x = (0.9 - 1.3y) / 1.5 \\ 3.36 - 4.85y + 2.6y = 2.7 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} z = 1 - x - y \\ x = (0.9 - 1.3y) / 1.5 \\ 2.25y = 0.66 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow y = 0.293;$
$\Rightarrow x = (0.9 - 1.3*0.293) / 1.5= 0.346;$
$\Rightarrow z = 1 - 0.346 - 0.293 = 0.361.$

Трети вариант на решение:

$$\left|\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 12.3x + 5y + 3.5z = 7.1 \\ 34.9x + 10y + 4.4z = 16.9 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} z = 1 - x - y \\ 12.3x + 5y + 3.5(1 - x - y) = 7.1 \\ 34.9x + 10y + 4.4(1 - x - y) = 16.9 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} z = 1 - x - y \\ 8.8x + 1.5y = 3.6 \\ 30.5x + 5.6y = 12.5 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} z = 1 - x - y \\ x = (3.6 - 1.5y) / 8.8 \\ 30.5[(3.6 - 1.5y) / 8.8] + 5.6y = 12.5 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} z = 1 - x - y \\ x = (3.6 - 1.5y) / 8.8 \\ y = 0.027728 / 0.4011363 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow y = 0.069;$
$\Rightarrow x = (3.6 - 1.5*0.069) / 8.8 = 0.397;$
$\Rightarrow z = 1 - 0.397 - 0.069 = 0.534.$

Кой от трите варианта ще избере портфейлният мениджър зависи от неговото отношение към възвръщаемостта и риска, например според вариационния коефициент.

Конкретните стойности са:

$$CV^{I} = \frac{22}{9.1}.100 = 241.76\%$$
$$CV^{II} = \frac{7.1}{4.4}.100 = 161.36\%$$
$$CV^{I} = \frac{16.9}{7.1}.100 = 238.03\%$$

Резултатите показват, че може да се избере вторият вариант.

Търсенето на оптимално решение може да продължи (а, разбира се, и да започне) със съответни компютърни симулации, които предполагат елементарен софтуерен продукт.

Тема 4. Практически модели за анализи и изследване на портфейлния риск

Знаем от теорията на вероятностите и статистиката, че за две дискретни случайни величини
x и y:

1. Ковариация на x и y е:

$$COV_{(x,y)} = E[(x-Ex).(y-Ey)] = Exy - Ex.Ey\,.$$

2. Коефициент на корелация е:

$$\rho_{(x,y)} = CORR_{(x,y)} = \sigma_{(x,y)} = \frac{COV_{(x,y)}}{\sqrt{Dx}.\sqrt{Dy}} = \frac{COV_{(x,y)}}{\sigma_x.\sigma_y}; \quad -1 \le \rho \le +1$$

<u>Пример № 1:</u>
Разглеждаме акции на компания „А" и компания „В" за четири минали години, които формират общ портфейл.

<u>Дадени са:</u>

- $R_i^{(A)}$ - възвръщаемост на акциите на „А" за i-тата година;
- $R_i^{(B)}$ - възвръщаемост на акциите на „В" за i-тата година;
- $k_A = 0.5$ е относителният дял (част) на участието на акциите на „А" в портфейла;
- $k_B = 0.5$ е относителният дял (част) на участието на акциите на „В" в портфейла;
- $n = 4$ минали години.

<u>Търси се:</u> $\rho_{(A,B)} = ?$ За тази цел се изчисляват:

- $R_i^{(P)}$ - възвръщаемост на портфейл от акции на „А" и „В" за i-тата година,
- $\overline{R}_A, \overline{R}_B, \overline{R}_P$ - средни стойности,
- $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_P$ - средноквадратични отклонения, и
- $COV_{(A,B)}$

<u>За минали периоди имаме следния първи вариант на историческите данни:</u>

години	$R_i^{(A)}$	$R_i^{(B)}$	$R_i^{(P)}$
2005	5	25	15
2006	30	15	22.5
2007	-10	0	-5
2008	15	40	27.5
Ŕ	10	20	15
σ	16.83%	16.83%	14.29%
$Cov_{(A,B)}$	+125		
$\rho_{(A,B)}$	+0.44		

(Частично положително корелиране)

$$R_i^{(p)} = k_A.R_i^{(A)} + k_B.R_i^{(B)}$$

$$k_A + k_B = 1$$

$$k_A = k_B = 0.5$$

$$R_i^{(p)} = 0.5.R_i^{(A)} + 0.5.R_i^{(B)}$$

$$COV_{(A,B)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(R_i^{(A)} - \bar{R}_A\right)\left(R_i^{(B)} - \bar{R}_B\right)}{n-1}$$

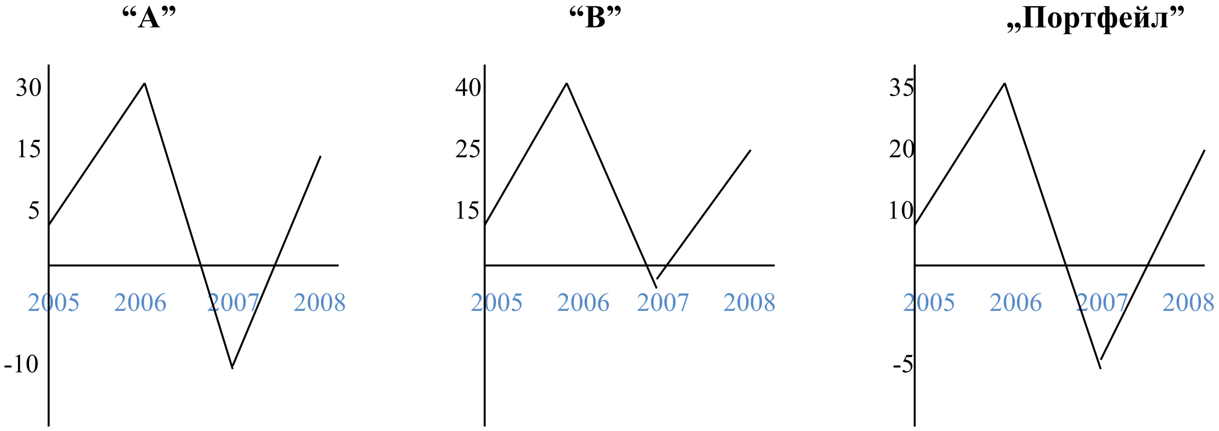
$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(R_i)}{n} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum (R_i - \bar{R})^2}{n-1}}$$

Втори вариант на историческите данни:

години	$R_i^{(A)}$	$R_i^{(B)}$	$R_i^{(P)}$
2005	5	15	10
2006	30	40	35
2007	-10	0	-5
2008	15	25	20
Ŕ	10	20	15
σ	16.83%	16.83%	16.83%
$Cov_{(A,B)}$	+283		
$\rho_{(A,B)}$	+1		

(Перфектно положително корелиране)

Графично представяне на втори вариант



Трети вариант на историческите данни:

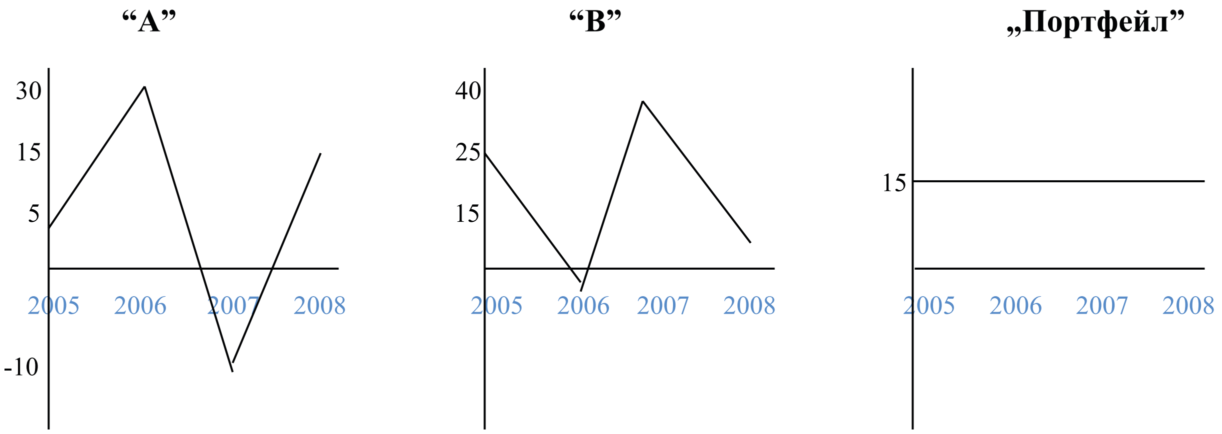
години	$R_i^{(A)}$	$R_i^{(B)}$	$R_i^{(P)}$
2005	5	25	15
2006	30	0	15
2007	-10	40	15
2008	15	15	15
Ŕ	10	20	15
σ	16.83%	16.83%	0%

$Cov_{(A,B)}$	-283
$\rho_{(A,B)}$	-1

(Перфектно отрицателно корелиране)

Портфейлът няма риск ($\sigma_p = 0\%$)

Графично представяне на трети вариант



Третият вариант доказва теоретичния извод, че **тогава, когато коефициентът на корелация между възвръщаемостите на активите е -1, тогава портфейлът има риск 0**, независимо от това, че $\sigma_A = \sigma_B = 16.83\%$.

Пример № 2. Ако целта е да се намери минимума на риска на портфейл от два актива – акции на Алфа АД и акции на Вега АД, то в каква пропорция трябва да се инвестира в тези акционерни дружества при корелационни коефициенти ρ(A, B) = +1; 0; –1, и ако са известни следните стойности:

№	Параметри	Алфа АД	Вега АД
1	Възвръщаемост – R	12%	13%
2	Риск – σ	15%	18%

Решение: Известни са следните три равенства за:

- очакваната възвръщаемост на портфейла

$$ER_p = k_A R_A + k_B R_B;$$

- рискът на портфейла

$$\sigma_p^2 = k_A^2 \sigma_A^2 + k_B^2 \sigma_B^2 + 2 k_A k_B \sigma_A \sigma_B \rho(A,B);$$

- сума на относителните дялове (пропорции) на акциите на Алфа АД и Бета АД

$$k_A + k_B = 1.$$

Нека се положи $\alpha = k_A$, тогава $k_B = 1 - \alpha$ и

$$ER_p = \alpha R_A + (1-\alpha) R_B,$$

$$\sigma_p^2 = \alpha^2 \sigma_A^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_B^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_A \sigma_B \rho(A,B).$$

От формална гледна точка, трябва да се намери тази стойност на α, при която функцията σ_p^2 има минимум. За тази цел намираме частната производна на σ_p^2, която приравняваме на нула и получаваме

$$\alpha = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_A.\sigma_B.\rho(A,B)}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_A.\sigma_B.\rho(A,B)} = k_A$$

от $\rho(A,B) = \dfrac{\operatorname{cov}(A,B)}{\sigma_A.\sigma_B}$ имаме

$$\alpha = \frac{\sigma_B^2 - \operatorname{cov}(A,B)}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\operatorname{cov}(A,B)} = k_A,$$

$$1-\alpha = \frac{\sigma_A^2 - \operatorname{cov}(A,B)}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\operatorname{cov}(A,B)} = k_B.$$

Втората производна трябва да е положителна.

За $\rho(A,B) = +1$, $\alpha^{(+1)} = \dfrac{-\sigma_B}{\sigma_A - \sigma_B} = \dfrac{-0.18}{0.15-0.18} = 6$, а това е абсурдна стойност, тъй като $\alpha \in [0;1]$.

За $\rho(A,B) = 0$,

$$\alpha^{(0)} = \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2} = \frac{0.18^2}{0.15^2 + 0.18^2} = \frac{0.0324}{0.0225 + 0.0324} = \frac{0.0324}{0.0549} = 0.590163934 \approx 0.59 .$$

За $\rho(A,B) = -1$ следва $\alpha^{(-1)} = \dfrac{\sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B} = \dfrac{0.18}{0.15+0.18} = \dfrac{0.18}{0.33} = 0.54(54) \approx 0.54$.

Тогава могат да се пресметнат и стойностите за риска на портфейла

$$\sigma_p = \sqrt{\alpha^2\sigma_A^2 + (1-\alpha)^2\sigma_B^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_A\sigma_B\rho(A,B)}$$

и да се формира обща таблица на крайните резултати

$\rho(A,B)$	-1	0	$+1$
α	0.54	0.59	6 (абсурд)
σ_p	≈ 0	0.1152	*

Пример № 3. Нека целта е да се намери максимумът на функцията $Z = ER_p - \sigma_p^2$ (наричана **единична** *Z*-функция) за определени стойности на k_A и k_B, ако $\rho(A,B) = 0$. Използваме стойностите на параметрите на Алфа АД и Вега АД от пример № X-2.

Решение: Полагаме $\alpha = k_A$ и $k_B = 1-\alpha$. Тогава

$$
\begin{aligned}
Z \quad &= ER_p - \sigma_p^2 = \alpha R_A = (1-\alpha)R_B + \alpha^2\sigma_A^2 - (1-\alpha)^2\sigma_B^2 = \\
&= \alpha(0.12) + (1-\alpha)(0.13) - \alpha^2(0.15)^2 - (1-\alpha)^2(0.18)^2 = \\
&= -0.0549\alpha^2 + 0.0548\alpha + 0.0976.
\end{aligned}
$$

Намираме производната на Z по α, приравняваме на нула и получаваме

$$-0.1098\alpha + 0.0548 = 0,$$
$$\alpha = 0.499089253 \approx 0.49$$

Тогава $Z = 0.1112706.$

Пример № 4: Нека целта е да се максимизира **разширената *Z*-функция** от вида

$$Z = mER_p - n\sigma_p^2,$$

като определите стойностите на k_A и k_B при корелационни коефициенти

$$\rho(A,B) = +1;+0.5;0;-0.5;-1$$

и приемете m и n като положителни числа, които определят отношението на лицето, вземащо решение към възвръщаемостта и риска.

Решение: Полагаме $\alpha = k_A$ и $k_B = 1-\alpha$. Тогава намираме в общ вид производната на **разширената *Z*-функция** по α, приравняваме на нула и получаваме:

$$\alpha = \frac{\frac{m}{2n}(R_A - R_B) + [\sigma_B^2 - \sigma_A\sigma_B\rho(A,B)]}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_A\sigma_B\rho(A,B)} = k_A.$$

Резултатите могат да бъдат подредени в таблицата

$\rho(A,B)$	–1	–0.5	0	+0.5	+1
α					
σ_p^2					
ER_p					
Z					

Целесъобразно е числово решение на разширената *Z*-функция, като се приемат параметрите на Алфа АД и Вега АД според пример № X-2.

За пълно изследване на разширената Z-функция може да се приеме $m = 1$, а $n \in [1 \div 5]$.

Резултатите да се подредят в пет самостоятелни таблици и да се направят изводи според отношението на лицето, вземащо решение към възвръщаемостта и риска.

Пример 5

Портфейл с 3 актива

$R_A=0.05$ $R_B=0.1$ $R_C=0.15$

Дисперсионна ковариационна матрица:

$$\left| \begin{array}{lll} \sigma_A^2 & cov(A,B) & cov(A,C) \\ & \sigma_B^2 & cov(B,C) \\ & & \sigma_C^2 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{lll} 0.25 & 0.15 & 0.17 \\ & 0.21 & 0.09 \\ & & 0.28 \end{array} \right|$$

$\mathbf{\sigma_p^2=K_A^2\sigma_A^2 +K_B^2\sigma_B^2+ K_C^2\sigma_C^2+ 2K_A.K_B.cov(A,B)+ 2K_A.K_C.cov(A,C)+ 2K_B.K_C.cov(B,C) \rightarrow min}$

$\mathbf{ERp=K_A.R_A+K_B.R_B+K_C.R_C}$ $\mathbf{K_A+K_B+K_C=1}$

$\mathbf{\sigma_p^2=?}$ $\mathbf{K_A=?}$ $\mathbf{K_B=?}$ $\mathbf{K_C=?}$

I Лагранжова задача:

Лагранжов множител t=? при $K_C=1-K_A-K_B$

$L= K_A^2\sigma_A^2+ K_B^2\sigma_B^2 +(1-K_A-K_B)^2\sigma_C^2+2K_A.K_B.cov(A,B) +2K_A.(1-K_A-K_B).cov(A,C) +2K_B.(1-K_A-K_B).cov(B,C)+ t[ERp- K_A.R_A-K_B.R_B-(1-K_A-K_B).R_C]$

-при ERp=0.1

$$\left| \begin{array}{l} 0.38Ka+0.34Kb+0.1t-0.22=0 \\ 0.34Ka+0.62Kb0.05t+0.38=0 \\ 0.1Ka+0.05Kb-0.05=0 \end{array} \right.$$

Ka=0.24 Kb=0.52 Kc=0.24 t=-0.48 $\sigma_p^2=0.1668$

-при ERp=0.09

$$\left| \begin{array}{l} 0.38Ka+0.34Kb+0.1t-0.22=0 \\ 0.34Ka+0.62Kb0.05t+0.38=0 \\ 0.1Ka+0.05Kb-0.06=0 \end{array} \right.$$

Ka=0.36 Kb=0.48 Kc=0.16 t=-0.64 $\sigma_p^2=0.173192$

-при ERp=0.08

$$\left| \begin{array}{l} 0.38Ka+0.34Kb+0.1t-0.22=0 \\ 0.34Ka+0.62Kb0.05t+0.38=0 \\ 0.1Ka+0.05Kb-0.07=0 \end{array} \right.$$

Ka=0.48 Kb=0.44 Kc=0.08 t=-1.12 $\sigma_p^2=0.1828$

-при ERp=0.07

$$\left| \begin{array}{l} 0.38Ka+0.34Kb+0.1t-0.22=0 \\ 0.34Ka+0.62Kb0.05t+0.38=0 \\ 0.1Ka+0.05Kb-0.08=0 \end{array} \right.$$

Ka=0.6 Kb=0.4 Kc=0 t=-1.44 $\sigma_p^2=0.1956$

-при ERp=0.11

0.38Ka+0.34Kb+0.1t-0.22=0
0.34Ka+0.62Kb0.05t+0.38=0
0.1Ka+0.05Kb-0.04=0

Ka=0.12 Kb=0.56 Kc=0.32 t=-0.16 σ_p^2=0.1636

-при ERp=0.12

0.38Ka+0.34Kb+0.1t-0.22=0
0.34Ka+0.62Kb0.05t+0.38=0
0.1Ka+0.05Kb-0.03=0

Ka=0 Kb=0.6 Kc=0.4 t=-0.16 σ_p^2=0.1636

II Чрез SOLVER:

-При ERp=0.05
Ka=1
Kb=0
Kc=-0
Ka+Kb+Kc=1
σp^2=0,25

-При ERp=0.06
Ka=0,799999993
Kb=0,200000007
Kc=-0
Ka+Kb+Kc=1
σp^2=0,2163999

-При ERp=0.07
Ka=0,599999994
Kb=0,400000006
Kc=-0
Ka+Kb+Kc=1
σp^2=0,1956

-При ERp=0.08
Ka=0,479987998
Kb=0,440004004
Kc= 0,080007998
Ka+Kb+Kc=1
σp^2=0,18279888

-При ERp=0.09
Ka=0,359999999
Kb=0,480000002
Kc=0,159999999
Ka+Kb+Kc=1
σp^2=0,1732

-При ERp=0.1
Ka=0,239999999
Kb=0,520000001
Kc=0,239999999
Ka+Kb+Kc=1
σp^2=0,1668

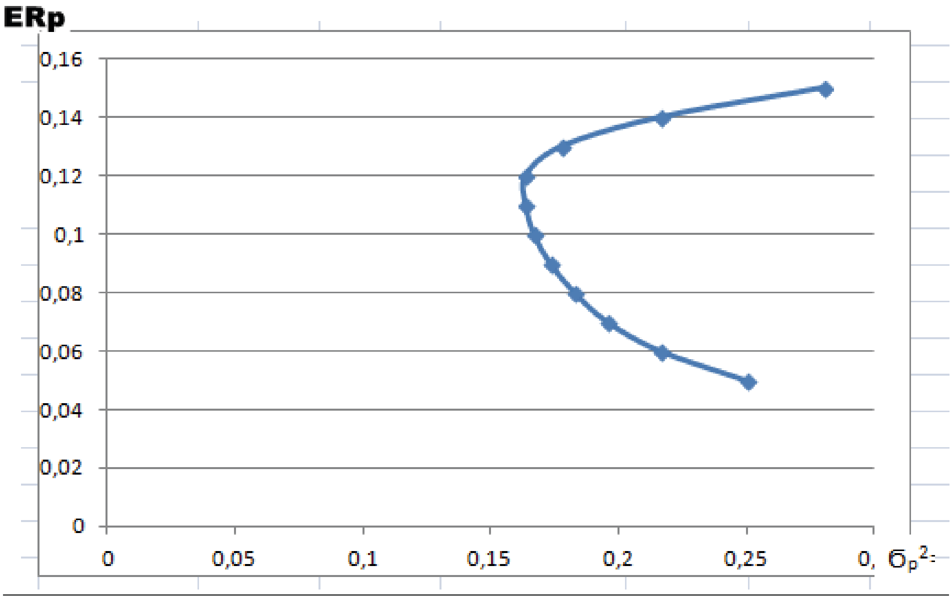
-При ERp=0.11
Ka=0,12
Kb=0,56
Kc=0,32
Ka+Kb+Kc=1
σp^2=0,1636

-При ERp=0.12
Ka=0
Kb=0,599999998
Kc=0,400000001
Ka+Kb+Kc=1
σp^2=0,1636

-При ERp=0.13
Ka=0
Kb=0,399999998
Kc=0,600000001
Ka+Kb+Kc=1
σp^2=0,1776

-При ERp=0.14
Ka=0
Kb=0,199999994
Kc=0,800000006
Ka+Kb+Kc=1
σp^2=0,216400002

-При ERp=0.15
Ka=0
Kb=0
Kc=1
Ka+Kb+Kc=1
σp^2=0,28



III Чрез метода на Златев:

Възвръщаемоста на портфейла е приблизително равна на средноаритметичната сума от възвръщаемостите нс $3^{\text{-те}}$ актива:

$ERp \approx (R_A+R_B+R_C)/3=(0{,}05+0{,}1+0{,}15)/3=0{,}3/3=0{,}1$

$ERp \approx 0{,}1$

$R_A.k_A + R_B.k_B + R_C.k_C = ERp$

$0{,}05.k_A + 0{,}1.k_B + 0{,}15.k_C = 0{,}1$ **(1)**

$k_A + k_B + k_C = 1 \quad k \in (0{,}1)$

Изразяваме $k_C=1- k_A-k_B$ и заместваме в **(1)**

$=> 0{,}05.k_A + 0{,}1.k_B + 0{,}15.(1- k_A-k_B)=0{,}1$

$0{,}05.k_A + 0{,}1.k_B + 0{,}15-0{,}15.\ k_A-0{,}15.k_B=0{,}1$

$0{,}1.k_A+0{,}05.k_B=0{,}05$

$0{,}1.k_A=0{,}05-0{,}05.k_B/:0{,}1$

$k_A=0{,}5-0{,}5.k_B$ Заместваме в $k_C=1- k_A-k_B$

$=> k_C=1-0{,}5+0{,}5.k_B -k_B$

$k_C=0{,}5-0{,}5.k_B=k_A$

$0{,}5-0{,}5.k_B \in(0{,}1)$

$=>0<\ominus$ $0{,}5-0{,}5.k_B<$⊜1

$\ominus$ $0{,}5-0{,}5.k_B>0$ ⊜$0{,}5-0{,}5.k_B<1$

$k_B<1$ $k_B>-1$,

но к е положително число $=> k_B \in(0{,}1)$

Изразяваме $\boldsymbol{\sigma_p^2=K_A^2\sigma_A^2 +K_B^2\sigma_B^2+ K_C^2\sigma_C^2+ 2K_A.K_B.cov(A,B)+ 2K_A.K_C.cov(A,C)+ 2K_B.K_C.cov(B,C)}$ чрез k_B:

$\sigma_p^2=K_A^2.0{,}25 +K_B^2.0{,}21+ K_C^2.0{,}28+ 2.[K_A.K_B.0{,}15+ K_A.K_C.0{,}17+ K_B.K_C.0{,}09]$

σ_p^2=(0,5-0,5.K_B)^2.0,25 +K_B^2.0,21+ (0,5-0,5.K_B)^2.0,28+ 2.[(0,5-0,5.K_B).K_B.0,15+ (0,5-0,5.K_B). (0,5-0,5.K_B).0,17+ K_B. (0,5-0,5.K_B).0,09]

σ_p^2=0,1875. K_B^2– 0,195. K_B +0,2175

Намираме първата производна на σ_p^2:

σ_p^{2}‘=2.0,1875.K_B - 0,195

Приравняваме я на 0:

2.0,1875.K_B - 0,195=0

0,375.K_B =0,195

K_B=0,52 => k_A=k_C=0,5-0,5.0,52=0,24

k_A=0,24; k_C=0,24

σ_p^2=0,1875. 0,2704– 0,195. 0,52 +0,2175

σ_p^2=0,1665

Други случаи:

Ако портфейла се състои само от актива А – **k_A=1, k_B=k_C=0**, а възвръщаемостта му е равна на тази на актива А => ERp= R_A=0,05

=> σ_p^2=1.0,25 +0.0,21+ 0.0,28+ 2.[1.0.0,15+ 1.0.0,17+ 0.0.0,09]=0,25

σ_p^2=0,25

Ако портфейла се приравни на актива В - **k_A=0, k_B=1, k_C=0,** ERp= R_B=0,1

σ_p^2=0.0,25 +1.0,21+ 0.0,28+ 2.[0.1.0,15+ 0.0.0,17+ 1.0.0,09]

σ_p^2=0,21

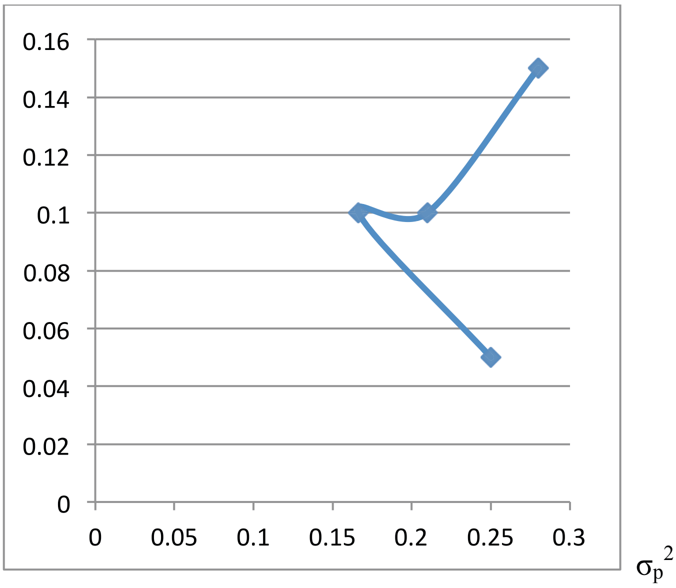
Ако портфейла се приравни на актива С - **k_A=0, k_B=0, k_C=1,** ERp= R_C=0,15

σ_p^2=0.0,25 +0.0,21+ 1.0,28+ 2.[0.0.0,15+ 0.1.0,17+ 0.1.0,09]

σ_p^2=0,28

=>Кривата на допустимите ефективни портфейли:

ERp


0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
σ_p^2

Тема 5. Анализ и оценка на риска на проекти

Методи за оценка на инвестиционни проекти

Според общоприетата дефиниция, инвестиция е определено вложение с цел да се получат конкретни положителни резултати в рамките на определен интервал от време. Едно непълно изброяване на инвестиционните инструменти може да включва: акции, облигации, репо-сделки, договорни (взаимни) фондове, недвижима собственост и имоти, акционерни дружества със специална инвестиционна цел (АДСИЦ), пенсионно осигуряване, застраховане, картини, скъпоценни камъни, марки, бижута и т.н.

Най-често видовете инвестиции се определят като:

- инвестиции във финансови активи, и
- инвестиции в реални активи.

Като инвестиция във финансови активи могат да се изброят основните финансови инструменти: акции (обикновени и привилегировани), облигации, перпетуитет (вечна рента), анюитети и т.н., както и портфейли, конструирани от финансови инструменти. Трябва да се припомни, че финансовите инструменти са прехвърлими договори за права върху бъдещи определени или определяеми парични потоци (доходи).

Инвестициите в реални активи изискват вземането на капиталобюджетни решения и решения за финансиране. Абсолютно задължително е при инвестиция в реални активи да се разработи по определени правила инвестиционен проект.

Вниманието на инвеститорите се концентрира върху най-удачната комбинация от множеството възможни методи за анализ и оценка на финансовата ефективност на разглежданите инвестиционни проекти.

Класическото разделяне на методите за анализ и оценка на финансовата ефективност е на:

- статични методи, и
- динамични методи.

Както е известно, при статичните методи оценката е по номиналните стойности на очакваните парични потоци в проекта, т.е. парите не се оценяват във времето.

В списъка на статичните методи най-често се включват следните шест метода:

- Метод на средногодишната норма на възвръщаемост на капитала;
- Метод на броя на оборотите на инвестирания капитал;
- Метод на относителната печалба;
- Метод на минималната себестойност;
- Метод на срока на откупуване;
- Метод на сравняването на аналитичната печалба.

При динамичните методи се отчита стойността на парите във времето, при това паричните потоци имат различна тежест според годината, на която принадлежат.

Списъкът на динамичните методи включва следните осем методи:

- Метод на нетната сегашна стойност (NPV);
- Метод на нетната бъдеща стойност (NFV);
- Метод на вътрешната норма на възвръщаемост (IRR);
- Метод на модифицираната вътрешна норма на възвръщаемост (MIRR);
- Метод на индекса на рентабилност (PI);
- Метод на коефициента „приходи / разходи”;
- Метод на анюитета;
- Метод на срока на дисконтираното откупуване.

Едно допълнително групиране на динамичните методи позволява да се направят следните обобщения:

- **Първа група** – методи за намиране на финансовия ефект от инвестицията за целия период, включва две метода:
    - Метод на нетната сегашна стойност, и
    - Метод на нетната бъдеща стойност.
- **Втора група** – методи за определяне на относителната ефективност на единица инвестиран капитал, включва четири метода:
    - Метод на вътрешната норма на възвръщаемост;
    - Метод на модифицираната вътрешна норма на възвръщаемост;
    - Метод на индекса на рентабилност;
    - Метод на коефициента „приходи / разходи”.
- **Третата група** е анюитетният метод за изчисляване на средногодишния финансов ефект от инвестирания капитал;
- **Четвъртата група** е методът на срока на дисконтираното осигуряване като метод за определяне на ликвидността на инвестицията.

Съществуващата теория и преди всичко практика определят като **основен метод** метода на сегашната стойност (NPV). На следващо място задължително трябва да се посочи методът на вътрешната норма на възвръщаемост (IRR), а като относително по-точен метод е методът на модифицираната норма на възвръщаемост (MIRR).

Спецификата на инвестиционните проекти, а от там – и на инвестиционната оценка и оптимизация на инвестиционния избор, могат да наложат използването на анюитетния метод, на метода на срока на дисконтираното осигуряване, и т.н.

В практиката понякога намира място и статичният метод на срока на откупуване, т.е. на срока на възстановяване на инвестирания капитал от прогнозираните нетни парични потоци. При този метод може да се окаже целесъобразно предварително да се оцени максимално допустимият срок на осигуряване.

От гледна точка на оценка на риска, при определен инвестиционен проект накратко се разглеждат двата основни метода.

Методът на нетната сегашна стойност (Net Present Value, NPV) за определен проект може да се пресметне по следния израз:

$$NPV = -K_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{NCF_t}{(1+r)^t}$$

където

- K_0 са еднократни инвестиционни разходи;
- NCF са нетни парични потоци;
- t е експлоатационен срок;
- r е норма на възвръщаемост (дисконтиране), която оценява стойността на парите във времето.

Ако NPV е число по-малко от 0, то проектът е неефективен, инвестиционно нецелесъобразен.

Методът на вътрешната норма на възвръщаемост (Internal Rate of Return, IRR) на даден проект се изчислява по интерполационната формула:

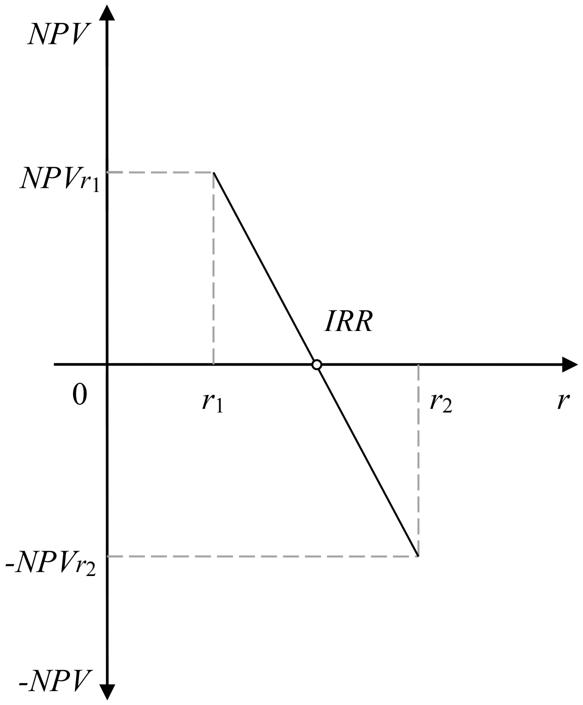
$$IRR = r_1 + (r_2 - r_1)\frac{NPV_{r_1}}{NPV_{r_1} - NPV_{r_2}}$$

където

- r_1 е норма на възвръщаемост, при която NPV_{r_1} е положително число;

- r_2 е норма на възвръщаемост, при която NPV_{r_2} е отрицателно число;

Представен графично, *IRR* се определя на равнината така:



За пресмятане на риска на определен проект се допуска, че проектът може да се намира в *n* различни икономически ситуации. За всяка *k*-та ситуация се прогнозира нетен паричен поток NCF_k и съответна вероятност p_k за сбъдване на тази ситуация. Тогава може да се пресметне $\overline{NCF}$, математическото очакване на проекта:

$$\overline{NCF} = \sum_{k=1}^{n} NCF_k . p_k , \qquad \sum_{k=1}^{n} p_k = 1 \cdot$$

Тогава рискът на проекта като средно-квадратично отклонение е:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(NCF_k - \overline{NCF}\right)^2 . p_k} \; .$$

Аналогично, рискът може да се изчисли според принципа за недостатъчното основание, т.е. принципа на Лаплас. Тогава $p^L = \frac{1}{n}$, а

$$\sigma^L = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(NCF_k - \overline{NCF}\right)^2 . n^{-1}} \; .$$

При сравняване на различни проекти избираме този проект, за който рискът е минимален, ако *IRR* на този проект има най-голяма стойност.

Един по-нататъшен анализ на инвестиционния риск може да предизвика привличането на такива методи като:

- Метод на безрисковите еквиваленти;
- Метод на включване на рисковата премия в нормата на дисконтиране;
- Метод на дървото на решенията;
- Метод на критичната точка;
- Метод на сценариите;
- Метод на анализа на сценариите.

В практиката според спецификата на инвестиционния проблем място могат да намерят и евристични (експертни) методи като:

- Метод „Монте Карло”;
- Метод „Мозъчна атака”;
- Метод „Делфи”;
- Метод на матрицата на полезността;
- Метод на аналитичната йерархия на Т. Саати и К. Кърнс, и много други.

Сравнение на инвестиционни проекти с оценка на риск и вътрешна норма на възвръщаемост при различни икономически сценарии

Сравнението на проекта А и проекта В е по два критерия:

1. $NPV = -K_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{NCF_t}{(1+r)^t} > 0 \rightarrow$ тогава проектът е инвестиционно (икономически) приемлив

където:

- K_0 са еднократни инвестиционни разходи;
- NCF са нетни парични потоци;
- r е дисконтова (желана) норма на възвръщаемост

2. IRR; $NPV = 0$, т.е. $K0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{NCF_t}{(1+r)^t}$

$$\downarrow$$

IRR=?

Примерните данни за проектите са:

Проект „А”

Фирма X инвестира 1 млн.лв. в технологична линия със срок на експлоатация 4 г. и се очаква да се получат NCF както следва:

1г. – 350 000 лв.

2г. – 400 000 лв.

3г. – 370 000 лв.

4г. – 360 000 лв.

<u>Задачата е:</u> Да се пресметне NPV на този проект и се вземе инвестиционно решение, ако инвеститорът определя:

r_2 =20%

r_1 =10%

Проект „В”

Фирма X инвестира 1 млн.лв. в технологична линия със срок на експлоатация 4г. и се очаква да се получат NCF както следва:

1г. – 400 000 лв.

2г. – 360 000 лв.

3г. – 420 000 лв.

4г. – 360 000 лв.

Задачата е: Да се пресметне NPV на този проект и се вземе инвестиционно решение, ако инвеститорът определя:
r_2 =25%
r_1 =5%

Проект "A"

K_0 лв.	Срок на експлоа-тация $t = \overline{1,4}$	NCF_t лв.	r_1 %	r_2 %	$NCF_t/(1+r_1)^t$ лв.	$NCF_t/(1+r_2)^t$ лв.	$NPVr_1^A$	$NPVr_2^A$	IRR^A
1000000	1	350000	0.1	0.2	318181.8182	291666.667	**172631.65**	**-42824.0741**	0.180123
	2	400000	0.1	0.2	330578.5124	277777.778			
	3	370000	0.1	0.2	277986.4763	214120.37			
	4	360000	0.1	0.2	245884.8439	173611.111			
					1172631.651	957175.926			

Решение: Проектът „A” при r_2=0.2 е инвестиционно неприемлив.

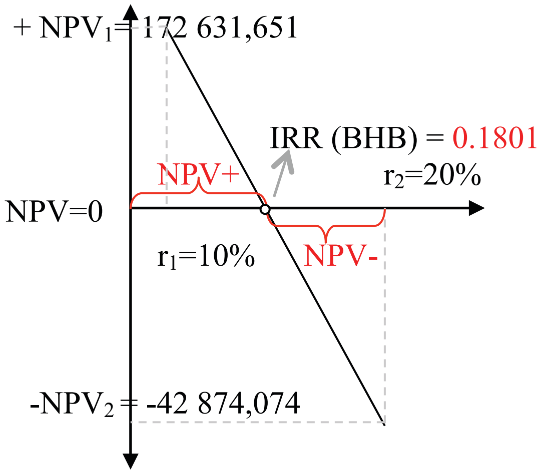
Проект "B"

K_0 лв.	Срок на експлоа-тация $t = \overline{1,4}$	NCF_t лв.	r_1 %	r_2 %	$NCF_t/(1+r_1)^t$ лв.	$NCF_t/(1+r_2)^t$ лв.	$NPVr_1^B$	$NPVr_2^B$	IRR^B
1000000	1	400000	0.05	0.25	380952.381	320000	**366467.68**	**-87104**	0.211591
	2	360000	0.05	0.25	326530.6122	230400			
	3	420000	0.05	0.25	362811.7914	215040			
	4	360000	0.05	0.25	296172.8909	147456			
					1366467.676	912896			

Решение: Проектът „B” при r_2=0.25 е инвестиционно неприемлив.

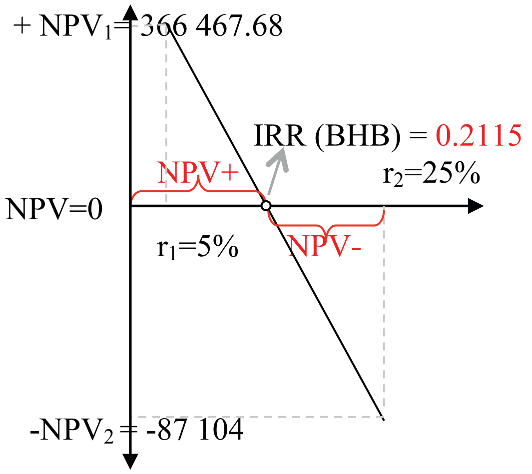
Като следваща стъпка изчисляваме по интерполационната формула *IRR* за проектите „A” и „B”.

Проект “А”



$$IRR = BHB = r_1 + (r_2 - r_1)\frac{NPV_{r_1}}{NPV_{r_1} - NPV_{r_2}}$$

Проект “В”



Следователно вътрешната норма на възвръщаемост на проекта „В” има по-висока стойност.

Третата стъпка е изчисляване на риска за всеки проект, като се предположат три икономически сценария.

Икон. сценарии k	Проект А			Проект В		
	NCF_k^A (хил. лв)	p_k^A	$NCF_k^A . p_k^A$ (хил. лв)	NCF_k^B (хил. лв)	p_k^B	$NCF_k^B . p_k^B$ (хил. лв)
1. Бум	1480	0.3	444	1540	0.3	462
2. Нормално	1000	0.4	400	1000	0.4	400
3. Рецесия	800	0.3	240	950	0.3	285
		$\sum = 1$	$\overline{NCF}^A = 1084$		$\sum = 1$	$\overline{NCF}^B = 1147$

Рискът като средно-квадратично отклонение е:

$$\sigma^A = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(NCF_k^A - \overline{NCF}^A\right)^2 .p_k^A}$$

$\sigma^A = 272.147$
$\sigma^B = 258.11$

Икон. сценарии k	Проект А			Проект В		
	NCF_k^A (хил. лв)	$p_k^{(A)\,L}$	$NCF_k^A .\, p_k^{(A)\,L}$ (хил. лв)	NCF_k^B (хил. лв)	$p_k^{(B)\,L}$	$NCF_k^B .\, p_k^{(B)\,L}$ (хил. лв)
1. Бум	1480	1/3	493.33	1540	1/3	513.33
2. Нормално	1000	1/3	333.33	1000	1/3	333.33
3. Рецесия	800	1/3	266.67	950	1/3	316.67
		$\sum = 1$	$\overline{NCF}^{(A)L} =$ **1093.33**		$\sum = 1$	$\overline{NCF}^{(B)L} =$ **1163.33**

По Лаплас:

$$\sigma^{(A)L} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(NCF_k^A - \overline{NCF}^A\right)^2 .n^{-1}}$$

$\sigma^{(A)L} = 285.345$
$\sigma^{(B)L} = 267.12$

Крайното решение е:

Избираме проект В, който има по-малък риск от проекта А и освен това вътрешната норма на възвръщаемост на проект В има по-висока стойност, т.е. $IRR^B > IRR^A$.

Тема 6. Модели за прогнозиране на риска от проблеми във финансовата устойчивост

Има предложени много модели, с които може да се прогнозира рискът от **финансови затруднения** на определен икономически субект. Най-често това са модели за прогнозиране на вероятността от банкрут.

В практиката често се употребяват като синоними такива понятия като банкрут, фалит, неплатежоспособност и несъстоятелност, което според Търговския закон на Р. България е некоректно. В част IV от Търговския закон е уредена **търговската несъстоятелност**. В закона има презумпция, че ако даден търговец не издължи в определен период своето изискуемо парично задължение по търговската сделка, то той е неплатежоспособен и **неплатежоспособността е първото основание за обявяване на несъстоятелност**.

Едно по-общо определяне в свободните енциклопедии на понятието **банкрут** (от *banca rotta* – „счупен тезгях“) е като законно обявена невъзможност на икономически субект да се изплати пред своите кредитори. При това банкрутът позволява длъжникът да погаси дълговете си чрез разпределяне на своите авоари между кредиторите.

В специализираната литература по разглежданите модели за прогнозиране на нарушения във финансовата устойчивост най-често се употребяват понятията банкрут и компания и въпреки определени неточности ще бъде следвана тази терминология като придобила гражданственост.

Опитите за създаване на модели за предсказване на неплатежоспособност започват от W. H. Beaver (1966) и продължават с модели, предимно основани на многомерен дискриминантен анализ.

Модели на Е. Алтмън

Често и не без основание Едуард Алтмън (*Edward Altman*) се определя като „баща“ на теорията за прогнозиране на фирмения банкрут, като създател на двуфакторния, петфакторния и седемфакторния Z-модели.

Двуфакторният модел е:

$$Z = -0.3877 - 1.0736K_1 + 0.0579K_2,$$

където:

- K_1 е коефициентът на текуща ликвидност (коефициент на покритие);
- K_2 е коефициентът на финансова зависимост, представляващ отношение между дълга и сумата на актива (пасива) на баланса.

- Ако $Z > 0$, то вероятността от банкрут е повече от 50% и нараства с увеличението на Z.
- Ако $Z = 0$, то вероятността от банкрут е равна на 50%.
- Ако $Z < 0$, то е малка вероятността от банкрут и с по-нататъшното намаляване на стойността на Z тази вероятност намалява.

Най-популярен е *петфакторният модел* за предвиждане на фирмен банкрут, известен като *Altman's Z-Score* (1968). Същността му се свежда до обвързване на относително независими коефициенти и определяне на теглата им, които са включени в едно структурно уравнение от променливи (финансови съотношения) и параметри (емпирично получени числа).

Финансовите коефициенти, участващи в уравнението, представляват: ликвидност, доходност, задлъжнялост, платежоспособност и ефективност.

Петфакторният модел е:

$$Z = 1.2\,X_1 + 1.4\,X_2 + 3.3\,X_3 + 0.6\,X_4 + 0.999X_5,$$

където:

- X_1 е съотношението между оборотен капитал (working capital) и сумата на всички активи (total assets), и *характеризира дела на чистия оборотен капитал в активите;*
- X_2 е съотношението между неразпределена печалба (retained earnings) и сумата на всички активи (total assets), и *характеризира рентабилността на активите на база неразпределена печалба;*
- X_3 е съотношението между печалба преди лихви и данъци (earnings before interest and taxes, *EBIT*) и сумата на всички активи (total assets), и *показва рентабилността на активите на база оперативна печалба;*
- X_4 е съотношението между пазарна стойност на капитала (market value of equity) и балансовата стойност на дълга (book value of total liabilities), и *характеризира коефициента на финансиране*;
- X_5 е съотношението между продажби (sales) и сумата на всички активи (total assets), и *показва възвръщаемостта на всички активи.*

Коефициентът *Z*, който се получава при прилагането на *Altman's Z-Score*, позволява да се определи вероятността предприятието да банкрутира в обозримо бъдеще.

- Ако $Z < 1.23$, то компанията е финансово затруднена компания и се определя потенциален банкрут.
- Ако $Z \in [1.23; 2.90]$, това е неопределеност, област на несигурност.
- Ако $Z > 2.9$, то компанията е сигурна.

Следователно, изследваната компания изпитва финансови затруднения при $Z < 2.9$, а се определя като фактически фалирала при $Z < 1.23$.

Уточненият петфакторен модел е:

$$Z = 1.2\,X_1 + 1.4\,X_2 + 3.3X_3 + 0.6\,X_4 + 0.999\,X_5 – 2.675.$$

- Ако $Z < 0$, то финансовото състояние на компанията се характеризира като „рисково“.
- Ако $Z > 0$, то компанията се счита за „статистически здрава“.

Петфакторен модифициран модел за непублични дружества:

$$\mathrm{Z} = 0.717\,X_1 + 0.847\,X_2 + 3.107\,X_3 + 0.42\,X_4 + 0.995\,X_5$$

Разликата тук е в X_4, който е съотношение между балансова стойност на собствения капитал и дълга. Граничната стойност на *Z* в тази модификация е 1.23. При $Z < 1.23$ се диагностицира висока вероятност от банкрут.

***Седемфакторният модел* на Алтмън** е разработен в 1977 г. и включва допълнена и видоизменена (в сравнение с петфакторния модел) съвкупност от показатели. Този модел е достъпен само за клиентите на *Zeta Services, Inc*.

Модели на Фулмър, Лис, Спрингейт и Тафлер

Моделът на Фулмър (*John G. Fulmer*) е:

$$H = 5.28\ V_1 + 0.212\ V_2 + 0,073\ V_3 + 1.270\ V_4 - 0.120\ V_5 + 2.335\ V_6 + 0.575\ V_7 + 1.083\ V_8 + 0.894\ V_9 - 6.075$$

където:

- V_1 е Неразпределена печалба / Сума на активите (активи общо);
- V_2 е Приходи от продажба / Сума на активите;
- V_3 е Счетоводна печалба / Сума на активите;
- V_4 е Паричен поток / Сума на дълга;
- V_5 е Лихвен дълг / Сума на активите;
- V_6 е Текущи пасиви / Сума на активите;
- V_7 е Материални активи / Сума на активите;
- V_8 е Оборотен капитал / Лихвен дълг;
- V_9 е EBIT / Изплатени лихви по кредити.

Банкрутът е неизбежен при $H < 0$.

Моделът на Лис (*R. Lis*) е:

$$Z = 0.063\ X_1 + 0.092\ X_2 + 0.057\ X_3 + 0.001\ X_4,$$

където:

- X_1 е Оборотен капитал / Сума на активите;
- X_2 е EBIT / Сума на активите;
- X_3 е Неразпределена печалба / Сума на активите;
- X_4 е Собствен капитал / Дълг.

- Ако $Z < 0,037$, то е висока вероятността от банкрут.
- Ако $Z > 0,037$, то вероятността от банкрут е малка.

Моделът на Спрингейт (*Gordon Springate*) е:

$$Z = 1.03\ X_1 + 3.07\ X_2 + 0.66\ X_3 + 0.4\ X_4,$$

където:

- X_1 е Нетния оборотен капитал / Активи общо;
- X_2 е EBIT / Активи общо;
- X_3 е Счетоводна печалба / Текущи пасиви;
- X_4 е Нетни приходите от продажби / Активи общо.

- При $Z < 0.862$ се приема, че компанията е в лошо финансово здраве и силно финансово затруднена. Оценката й е “крах”.

Моделът на Тафлер (*Richard Taffler*) е:

$$Z = 0.53\ X_1 + 0.13\ X_2 + 0.18\ X_3 + 0.16\ X_4,$$

където:

- X_1 е EBIT / Текущи задължения;
- X_2 е Текущи активи / Пасиви общо;

- X_3 е Текущи задължения / Активи общо;
- X_4 е Нетни приходи от продажба / Активи общо.

- Ако $Z > 0.3$, то е малка вероятността от банкрут;
- Ако $Z < 0.2$, то е голяма вероятността от банкрут.

Коефициентите, включени в разгледаните по-горе модели значително се различават. В някои от тях те търпят развитие (например в моделите на Алтмън); други не се припокриват (например в петфакторния модел на Алтмън и в четирифакторния модел на Тафлер), в трети съвпадението е значително (например, модела на Лис и петфакторния модел на Алтмън). Различна е и тежестта, която авторите им дават в уравненията. Например, в петфакторния модел на Алтмън най-голяма е тежестта (3.3) на рентабилността на активите и най-малка – на съотношението собствен и заемен капитал (0.6). В модела на Тафлер с най-голямо значение е отношението между EBIT и текущи задължения (0.53), а с най-малко – отношението между текущите активи и сумата на дълга (0.13), и т.н.

Опитът, който В. Касърова[1] обобщава, показва, че прилагането на различните модели за оценка на опасността от банкрут върху една и съща българска компания дава различни, в някои случаи дори противоречиви, резултати. Причините за това са няколко.

Първо, моделите са разработени в условията на конкретна развита икономика, в определен период от време и могат да не съответстват на съвременните условия.

Второ, съществуват не малко методологични и терминологични различия във финансовите отчети, използвани като информационна база за прилагане на моделите в развити и развиващи се икономики. Тези различия влияят върху смисъла и съдържанието на коефициентите в отделните модели.

Трето, методологията за разработване на моделите не отчита отрасловите различия, което се отразява неблагоприятно върху тяхната гъвкавост и адаптивност, а това може да доведе до излишен оптимизъм или прекален песимизъм в отделни случаи.

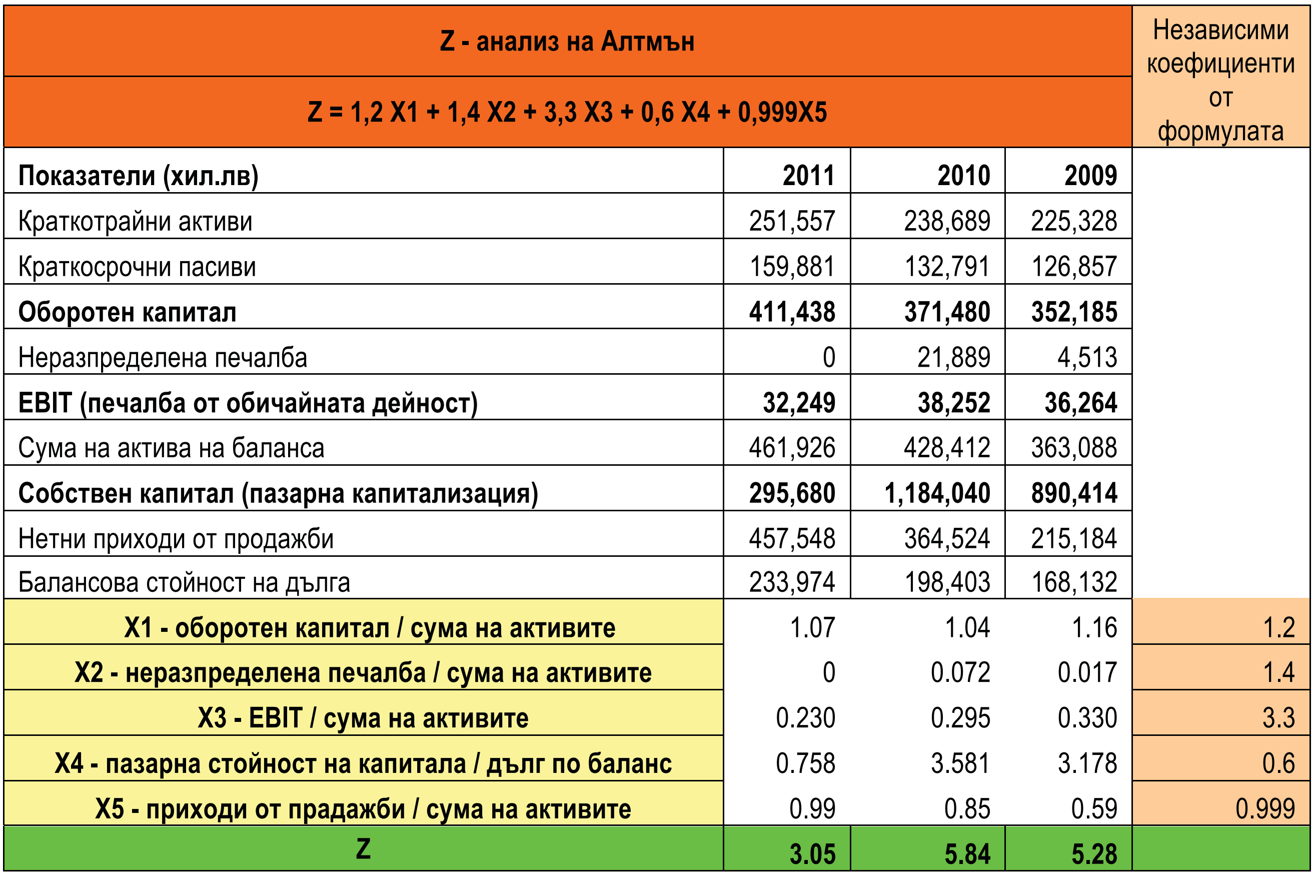
Следователно, моделите могат да се използват като **допълнителен аналитичен инструмент** и трябва да бъдат подходящо адаптирани към конкретните конюнктурни и икономически условия. Освен това моделите могат да се „използват“ за различни цели. Например, кредиторите могат да използват тези модели, за да: построят “траекторията” на кредитополучателя по данни от финансовата отчетност за няколко последователни години и да определят риска от неплатежоспособност; да обосноват препоръките си към кредитополучателя и условията, при които може да му се отпусне кредит; да подадат “сигнал за тревога” към мениджмънта на кредитополучателя. От своя страна, мениджмънта и анализиците могат да ги използват при обосноваване на решения за сливания и придобивания, покупката на пакети акции и т.н.

Числов пример за *Z* модел на една компания

Нека разгледаме една компания за три последователни години – 2011, 2010 и 2009. Числовите стойности на показателите са дадени в таблицата и приложението на петфакторния *Z* модел показва, че тази компания е сигурна, но се наблюдава намаляване на стойността на *Z*.

---

[1] Касърова, В. Модели и показатели за анализ на финансовата устойчивост на компанията. Научен електронен архив на НБУ. http://eprints.nbu.bg/637/1/FU_1_FINAL.pdf



Z - анализ на Алтмън				Независими коефициенти от формулата
Z = 1,2 X1 + 1,4 X2 + 3,3 X3 + 0,6 X4 + 0,999X5				
Показатели (хил.лв)	**2011**	**2010**	**2009**	
Краткотрайни активи	251,557	238,689	225,328	
Краткосрочни пасиви	159,881	132,791	126,857	
Оборотен капитал	**411,438**	**371,480**	**352,185**	
Неразпределена печалба	0	21,889	4,513	
EBIT (печалба от обичайната дейност)	**32,249**	**38,252**	**36,264**	
Сума на актива на баланса	461,926	428,412	363,088	
Собствен капитал (пазарна капитализация)	**295,680**	**1,184,040**	**890,414**	
Нетни приходи от продажби	457,548	364,524	215,184	
Балансова стойност на дълга	233,974	198,403	168,132	
X1 - оборотен капитал / сума на активите	1.07	1.04	1.16	1.2
X2 - неразпределена печалба / сума на активите	0	0.072	0.017	1.4
X3 - EBIT / сума на активите	0.230	0.295	0.330	3.3
X4 - пазарна стойност на капитала / дълг по баланс	0.758	3.581	3.178	0.6
X5 - приходи от прадажби / сума на активите	0.99	0.85	0.59	0.999
Z	**3.05**	**5.84**	**5.28**	

За изчисляване на стойностите на *Z*-коефициента на Алтмън може да се използва онлайн калкулатор[2].

---

[2] http://www.ironwoodadvisory.com/zscore.htm – Калкулатор за смятане на Z коефициента на Алтмън

Библиография

1. Александрова, М. Оптимизация на инвестиционния избор. Финансови критерии и техники за оптимизация на инвестиционния избор при инвестиции в реални активи. Издателство „Тракия-М”, С., 2002.
2. Александрова, М. Управленски решения и риск. Издателство „Авангард Прима“, С., 2009.
3. Александрова, М. Финансиране и ефективност на инвестициите в реални активи. Издателски комплекс УНСС, С., 2012.
4. Александрова, М., Е. Калчев. Финанси на предприятието. Издателство на Нов български университет, С., 2013, 429.
5. Ангелов, И. Световната икономическа криза и България. Академично издателство „Проф. М. Дринов“, С., 2010.
6. Атали, Ж. Кризата, а след това? Издателство „Рива“, С., 2009.
7. Балабанов, И. Риск-мениджмънт. Издательство „Финансы и статистика”, Москва, 1996.
8. Бахчеванов, Г., М. Манев, Р. Русева. Операции в отговор на кризи. Издателство „СофтТрейд”, С., 2005.
9. Бек, У. Световно рисково общество. Издателство „Обсидиан”, С., 2001.
10. Блейк, К. Изкуството да вземаме решения. Как да управляваме в един несигурен свят. (превод от англ. език), Издателска къща „АМАТ-АХ”, С., 2009.
11. Боди, З., А. Кейн, А. Дж. Маркъс. Инвестиции (превод от англ. език, трето издание), Натурела АД, С., 2000.
12. Боди, З., Р. Мертон. Финанси (превод от англ.). Уч. пос. Издательский дом „Вильянс", Москва, 2000.
13. Брукс, Ал. Технически анализ на ценовото движение – за сериозния трейдър. Да четем ценовите графики бар по бар. (превод от англ.), Издателство „Сиела Норма“ АД, С., 2013.
14. Бъфет, М., Д. Кларк. Уорън Бъфет и анализът на финансови отчети (превод от англ. език), Издателство „Изток – Запад”, С., 2011.
15. Вяткин, В., И. Вяткин, В. Гамза, Ю. Екатеринославский, Дж. Хэмптон. Риск-мениджмънт. Учебник (под ред. И. Юргенска), ИТК „Дашков и Ко”, Москва, 2003.
16. Габровски, Р. Индустриален риск мениджмънт. АИ „Ценов", Свищов, 2002.
17. Гейдж, Р. Рискът:новата сигурност – Правилата са се променили. Анхира ЕООД., С., 2013, 126.
18. Георгиев, И. Основи на инвестирането (второ преработено и допълнено издание). Университетско издателство „Стопанство”, С., 1999.
19. Георгиев, И. Управление на риска в индустриалните проекти. – Икономически алтернативи, бр. 4, 2008, 13 – 29.
20. Георгиев, Р. Делови решения и сигурност на организацията. Издателство „Софт Трейд”, С., 2007.
21. Георгиева, П. И. Попчев. Ефективно разпределение на финансовите ресурси: два подхода от софт компютинг. В: Сборник с доклади от юбилейната научно-практическа конференция с международно участие “Времена на несигурност и

рискове: възможности и перспективи за развитие”, том I, Пловдив, 7-8 ноември 2014. Университетско издателство “П. Хилендарски”, Пловдив, 2015, 293-300, ISBN 978-619-202-036-1.

22. Геров, Г., В. Пашева. Приложна математика за икономисти. Издателство „НБУ – ЦДО”, С., 2003.

23. Дилков, Ц. Управление на риска. Издателство „Нова звезда“, С., 2008.

24. Димитрова, Р., И. Данева, Е. Калчев, Р. Димитрова, К. Костенаров. Въведение във финансите. Издателство на Нов български университет. С. 2012.

25. Дочев, Д. Теория на риска, Варна, 1999.

26. Драганов, Х. Управление на риска. Издателство „Тракия-М”, С., 2003.

27. Драганов, Х., Г. Димитров. Управление на риска. С., 2009.

28. Драганов, Х., М. Нейков. Анализ на дейността на застрахователното дружество. УИ „Стопанство“, С., 1999.

29. Дракър, П. Мениджмънт в следващото общество (превод от англ. език). Издателство „Класика и стил”, С., 2006.

30. Залтман, Д. Как мислят потребителите? Незаменими прозрения за „манталитета“ на пазара. (превод от англ.) Издателство „Класика и стил“ ООД, С., 2006.

31. Илиев, В. Риск и общуване. Издателство „Леге Артис”, Плевен, 2004.

32. Йовкова, Й., Б. Петков, Финансова математика (второ преработено и допълнено издание). Издателство „Нова звезда”, С., 2001.

33. Канеман, Д., Мисленето (превод от англ. език). Библиотека „Красив ум“. Издателство „Изток-Запад”, София, 2012.

34. Каплан, Р., Д. Нортън. Балансирана система от показатели за ефективност: Как да превърнем стратегията в действие (превод от англ. език). Издателство „Класика и стил” ООД, С., 2005.

35. Каракашева, Л., Б. Маркова. Фирмен и външнотърговски бизнес. ИК „Призма“, С., 1996.

36. Карлберг, К. Бизнес анализ с Microsoft Excel (превод от англ. език). Издателство „СофтПрес” ООД, С., 2003.

37. Касърова, В. Новите метрики на корпоративния финансов успех. Издателство „Евдемония продъкшън“ ЕООД, С., 2013.

38. Касърова, В. Финансов анализ. Издателство на Нов български университет, С., 2013.

39. Кацаров, И. Теория на рисковете. ВФСИ, Свищов, 1995.

40. Китанов, Н. Нова книга за акциите и борсата. АРТ ГРАфИК, С., 2000.

41. Клайн, Н. Шоковата Диктрина. Възходът на капитализма на бедствията. Издателство “Изток – Запад”. С., 2011, 693.

42. Кой е виновен за кризата? Отговор на австрийската школа. (Сборник статии – съставители Георги Ангелов и Валери Димитров), Издателство „Сиела“, С., 2010.

43. Коларов, Н. Методи на корпоративните финанси. Издателство „Сиела – Софт енд паблишинг“, С., 2001.

44. Конаган, Д., Д. Смит. Книгата за парите или как функционира светът на финансите. Книгомания. С., 2014, 256.

45. Копланд, Т., В. Антикаров. Практическо ръководство по реални опции. Издателство „Класика и Стил” ООД, С., 2002.

46. Корпоративните финанси на формиращите се пазари (изследвания и практики). Издателство на Нов български университет, С., 2012, 388 стр.

47. Котлър, Ф., Д. А. Каслионе. Хаотика: Мениджмънт и маркетинг в епохата на турбулентността. „Локус пъблишинг” ЕООД, Печат: Абагар АД, С., 2009.

48. Кругман, П. Завръщането на икономиката на депресията и кризата от 2008 г. (превод от англ. език). Издателство “Изток – Запад”. С., 2009.

49. Куигин, Д. Зомби икономикс. Мъртвите идеи още бродят сред нас… (превод от англ.), Издателство „Изток – Запад“, С., 2013.

50. Кюркчиев, Н. Избрани глави от приложната финансова математика. Академично издателство „Проф. Марин Дринов“, С., 2012, 175 стр.

51. Левинсън, Д. К., П. Р. Д. Ханли. Guerilla Marketing. Право в подсъзнанието. Фокусирано убеждаване за постигане на печалби. (превод от англ.), Издателство „Класика и стил“, С., 2006.

52. Левисън, М. Финансови пазари. Пътеводител (трето издание, превод от англ. език). Издателство „Класика и стил“ ООД, С., 2004, 326 стр.

53. Лехтонен, Я. Рискове на публичността (превод от англ. език). Издателство „Рой Комюникейшън ЕООД”, С., 2006.

54. Майнс, Х. (с предговор от Д. Гръбин) Пари и власт. История на бизнеса (превод от англ.), Издателство „Класика и стил“ ООД, С., 2001.

55. Манев, М., Р. Русева. Управление при кризи и конфликти. Издателство „Софт Трейд”, С., 2005.

56. Манов, Б. Основи на финансите. Пари и банково дело. Теория и практика. Издателство „Нов живот“, С., 2012.

57. Манов, Б. Основи на финансите. Публични финанси, застраховане и социално осигуряване. Теория и практика. Издателство „Нов живот“, С., 2012.

58. Мартин, П., Б. Холнагел. Големите финансови спекулации. От древността до днес. (превод от немски език), С., 2003.

59. Масларов, С., Д. Тошева – Георгиева. Финансиране на външнотърговските сделки. Издателство на Нов български университет. С., 2007, 249.

60. Матеев, М. Анализ и оценка на риска при избор на инвестиционни решения (второ издание). Университетско издателство „Стопанство”, С., 2000.

61. Матеев, М. Сборник задачи и казуси по корпоративни финанси. Част 2. Издателство „Тракия-М“, С., 2000.

62. Международни счетоводни стандарти. Издателство „Форком”, С., 2003.

63. Мей, Д., К. Симънс. Всеки бизнес се нуждае от един „ангел”: Как да получите необходимите средства за растежа на своя бизнес (превод от англ. език). Издателство „Класика и стил” ООД, С., 2008.

64. Менгов, Г. Вземане на решения при риск и неопределеност. Издателска къща „Жанет-45”, С., 2010.

65. Минасян, Г. Външен дълг: Теория, практика, управление (второ преработено и допълнено издание), Издателство „Сиела Софт енд Паблишинг“, С., 2007.

66. Минасян, Г. Финансово програмиране (второ преработено и допълнено издание), ИК „Горекс прес“, С., 2004.

67. Михайлов, Е., А. Ангелов, Ж. Вътев, Б. Кръстев, Г. Георгиев. Практически банков мениджмънт. Издателство „АБАГАР”, Велико Търново, 2002.

68. Мишкин, Ф. Теория на парите, банковото дело и финансовите пазари (превод от англ. език). Издателство „Отворено общество”, С., 1999.

69. Модели и решения на икономически задачи в софтуерна среда. УИ „Паисий Хилендарски“, Пловдив, 2011.

70. Наръчник по здравословни и безопасни условия на труд (авторски колектив с ръководител инж. Т. Младенов), С., 2003.

71. Нейков, М., Р. Нейкова. Рискът и застраховането. ИК„Alma Mater International", Габрово, 2001.

72. Ненков, Д., Оценка на инвестициите в реални активи, УИ „Стопанство“, С., 2005.

73. Ненов, Т. Управление на риска. Варна, 1998.

74. Ненов, Т. Фирмена диагностика и управление на риска. Варна, 1996.

75. Николова, Н. Обща теория на финансите. „Сиела – Софт енд паблишинг”, С., 2002.

76. Норберг, Й. Финансовият крах (Как американската мания за собствен дом и лесни пари доведе до икономическа криза), Издателска къща „МАК“, С., 2010.

77. Орешарски, П. Инвестиции: Анализ и управление на инвестиционни портфейли. „ЕА” АД, Плевен, 2009.

78. Павлов, Г. Информационните технологии в отбраната и сигурността. Учебник. УИ „Стопанство“, С., 2003.

79. Панайотов, Д. Психология на бизнеса. Издателство „Сиела Софт енд Паблишинг“, С., 2001.

80. Парушев, С. Облигации. Примери и таблици за изчисление (първо издание). PRINCEPS, Варна, 1995.

81. Петранов, С. Инвестиции. Издателство „Класика и стил”, С., 2010.

82. Петрова, И. Сделки с ценни книжа или как да ги купуваме и продаваме изгодно. PRINCEPS, Варна, 1993.

83. Петров, Г. 14 урока по фирмени финанси. Издателство „Тракия-М”, С., 2002.

84. Петров, Г., Е. Райков, Е. Цанкова, Г. Маринков, И. Костов, К. Шутилова-Йочколовска, М. Главева, М. Георгиева, Р. Маринова, Р. Борисова, Р. Радев, Т. Петкова. Корпоративни финанси. Кратък курс. Трето допълнено издание. Издателство „Тракия-М“, С., 2010.

85. Попчев, И. Многокритериален избор на проектни решения: Някои практически алгоритми. В: „Финансови решения: Изследвания и практики”. Издателство на Нов български университет, С., 2009.

86. Попчев, И. Рискът – поглед отвън. В: „ФАКТ”, № 1, 2003, 28-35.

87. Попчев, И. Рискът в Новата парадигма. В: „Мениджмънт и лидерство” (под ред. на доц. д-р Д. Панайотов). Издателство на Нов български университет. С., 2008.

88. Попчев, И. Стратегии за управление на риска (записки на лектора), НБУ – ЦДО, 2004.

89. Попчев, И., Н. Велинова. Модели за оптимално хеджиране на портфейли от ценни книжа. – Икономика, год. LX, 2006, бр. 3, 88-91, ISSN: 1312-2428.

90. Попчев, И., Н. Велинова. Конструиране на неутрални портфейли от ценни книжа. – Икономически алтернативи, 2006, бр. 5 (76), 15-29, ISSN: 1312-5281.

91. Попчев, И., Н. Велинова, Управление на риска на портфейли от ценни книжа чрез оптимално хеджиране. – Икономически алтернативи, 2008, бр. 1, 7-12, ISSN: 1312-5281.

92. Попчев, И., И. Радева. Управление на облигационни портфейли: анализ и приложение на модел за многопериодна имунизация. - Икономическа мисъл, XLIX, 2004, No. 4, 28-43, ISSN: 0013-2993.

93. Попчев, И., И. Радева. Изследване на характеристиките на доходността и ценовата чувствителност на облигации с фиксиран доход. В: Научни трудове на Факултета по икономически и социални науки на ПУ "П.Хилендарски", годишник No. 3, Пловдив, 2004, 5-18.

94. Попчев, И., И. Радева, Имунизацията – стратегия за управление на активите и задълженията. В: Годишник 2005 „Икономика и бизнесадминистрация: методология, интердисциплинарност, анализи, стратегии", Издателство на Нов български университет, 2005, София, 118-145, ISBN: 954-535-329-5.

95. Попчев, И., И. Радева. Накратко за възможностите на кредитните деривативи. В: Финансови иновации – изследвания и практики, Издателство на Нов български университет, 2008, София, 115-135, ISBN: 978-954-535-502-8.

96. Попчев, И. Турбулентност, решения и афоризми. В: „Списание на Българската академия на науките", CXXIII, бр. 6, 2010, 85-89.

97. Попчев, И., Т. Стоилов, К. Тенекеджиев, К. Стоилова, Н. Николова, З. Иванова, И. Радева, Е. Тричкова, Б. Стоянов, Ч. Бечев, М. Полименов, Н. Джеджев, В. Желев. Инвестиционен анализ и портфейлна оптимизация: Теория и практика. ИК Море, Варна, 2010, 150. ISBN 978-954-9722-13-0.

98. Попчев, И. Internet of things и рискове. В: МАТТЕХ 2012 сборник научни трудове, том 2. Университетско издателство "Епископ Константин Преславски" Шумен, 2012, с. 488. ISSN: 1314 – 3912.

99. Пътев, П., Н. Канарян. Управление на портфейла. Издателство „АБАГАР", В. Търново, 2008.

100. Радева, И. Проектиране на икономически клъстери. Автоматика и информатика. бр. 4/2011, с. 48 – 52. ISSN 0861-7562.

101. Радева, И. Приложение на теорията на размитите множества в задачи за избор при икономическа клъстеризация. // Корпоративните финанси на формиращи се пазари. Изледвания и практики. Нов Български Университет - София, 2012, 186-217. ISBN 978- 954-535-739-8.

102. Радева, И., Модели за вземане на решения при формиране на клъстерни структури. Автореферати на дисертации, Институт по информационни и комуникационни технологии – БАН. 1/2013. E ISSN 1314-6351.

103. Радева, И. Оценка на синергия в икономически клъстери. Подходи и решения, Третата научно-практическа конференция с международно участие на НБУ на тема „Корпоративните финанси на формиращите се пазари – теория и практика" НБУ, София, 09 и 10 септември 2013 г.

104. Рубини, Н., С. Мим. Кризисна икономика. (превод от англ. език). Издателство „Сиела Норма" АД, С., 2011.

105. Рудык, Н. Б. Поведенческие финансы или между страхом и алчностью. Издательство „ДЕЛО", Москва, 2004.

106. Ръководство за система от знания за управление на проекти (PMBOK® GUIDE), Четвърто издание (превод от англ. език). Издателство „Класика и стил” ООД, С., 2011.

107. Савова, Б., Е. Евгениев. Оценка на професионалния риск (второ преработено издание). Издателска къща „Шанс” АД, С., 2008.

108. Сален, П. Назад към капитализма... за да избегнем кризите. „Сиела – Софт енд паблишинг” АД, С., 2011.

109. Санду, Д. Р. Оцеляване при бедствия и аварии (превод от англ. език). Издателство „Дуо Дизайн” ООД, С., 2004.

110. Семерджиев, Ц. Сигурност и защита на информацията, Издателство „Класика и стил“, С., 2007, 226 стр.

111. Семерджиев, Ц. Управление на информационната сигурност, Издателство „Софтрейд“, 2007, 286 стр.

112. Стендинг, Г. Прекариатът – новата опасна класа. ИК “Труд и право”. С., 2013, 518.

113. Стиглиц, Д. Свободно падане. Америка, свободните пазари, кризата и виновните за нея. Издателска къщо „ИнфоДар”, С., 2011.

114. Стиглиц, Д. Цената на неравенството. Как днешното разделено общество застрашава бъдещето ни (превод от англ. език). Издателство “Изток – Запад”. С., 2014, 544.

115. Стоянов, В. Парите и смъртта на Запада през призмата на глобализацията. ИК „Галик“, С., 2005.

116. Стоянов, С. Фючърси, опции и синтетични ценни книжа. Издателство „Тракия-М”, С., 1999.

117. Талеб, Н. Н. Надхитрени от случайността: Скритата роля на случайността в живота и на пазара. Издателска къща „ИнфоДар” ЕООД, С., 2009.

118. Талеб, Н. Н. Черният лебед: Въздействие на слабо вероятното в живота и на пазара. Издателска къща „ИнфоДар” ЕООД, С., 2009.

119. Тодоров, Л. Рентабилност и бизнес риск. Модели и методи за анализ. Издателство „Тракия-М”, С., 2003.

120. Тодоров, Л. Съвременни модели за оценка на бизнеса. Издателство „Тракия-М“, С., 2011.

121. Томов, В. Теория на риска. Анализ и оценка на риска в производството. Русенски университет, Русе, 2003.

122. Томов, В., П. Христов, А. Ненкова. Теория на риска и безопасността. Ръководство. Издателство „Албатрос” (Варненски свободен университет „Черноризец Храбър”), Варна, 2004.

123. Уайнър, Е. Дж. Сенчестият пазар, големите играчи и новият световен ред (превод от англ. език), НСМ Медия, С., 2011.

124. Уедърфорд, Д. История на парите. От пясъчника до киберпространството (превод от англ.), Издателство „Обсидиан“, С., 2001.

125. Уилс, Д. Управление на риска в банковата сфера (превод от англ. език). ИК „Хефест”, София-Пловдив, 1994.

126. Уолш, К. Ключовите коефициенти в мениджмънта: Най-достъпният гид във важните за вашия бизнес цифрови показатели (четвърто издание). Издателска къща „ИнфоДар” ЕООД, С., 2008.

127. Управление риском: Риск. Устойчивое развитие. Синергетика. Издательство „Наука”, Москва, 2000.

128. Уткин, З. Риск-мениджмънт. Учебник. Ассоциация авторов и издателей „ТАНДЕМ”. Издательство ЗКМОС, Москва, 1998.

129. Хохлов, Н. Управление риском. Учебное пособие для вузов. Издательство „ЮНИТИ-ДАНА”, Москва, 2001.

130. Христов, В. Обща и корпоративна финансова теория. Издателство „ИМН“, Университетска фондация – Пловдив, 2005.

131. Христов, П. Метатеория на риска. Парадигми и подходи. Издателство „Албатрос”, С., 2010.

132. Цончев, Р. Финансови изчисления. Издателство на Нов български университет, С., 2009.

133. Чобанов, П. Неравновесията, рисковете и глобалната криза. Издателство „Пропелер“, С., 2012.

134. Чолаков, Н. Математически методи и модели в животозастраховането и пенсионното осигуряване. I издание. Издателство „Тракия-М“, С., 2003.

135. Шарп, У. Ф., Г. Дж. Александер, Д. В. Бэйли. Инвестиции (превод от англ. език). Издательский дом „ИНФРА-М”, Москва, 1999.

136. Янкова, Т. Приложна математика: финансова математика. УИ “П. Хилендарски”, Пловдов, 2014, 204.

137. Ackert, L. F., R. Deaves, Behavioural Finance: Psychology, Decision-Making and Markets. South-Western, Cengage Learning, Mason, OH, 2010.

138. Angelova, V. Investigations in the area of Soft computing. Targeted state of the art report, Cybernet. Inf. Techn, Vol. 9, No 1, 18-24, 2009, ISSN 1311-9702.

139. Barton, T,, W. Shenkir, P. Walker. Making enterprise risk management pay off. Published by Financial Times / Prentice Hall PTR, Pearson Education Inc. New York, 2002.

140. Bernstein, P. Against the Gods. The remarkable story of risk. John Wiley and Sons, Inc., N.Y., 1996.

141. Clayton, M. Risk happens! Managing risk and avoiding failure in business projects. Published by Marshall Cavendish Buiness, London, 2011.

142. Daigler, R. Financial Futures Markets. Concepts, evidence, and applications. Harlet Collins College Publishers, N.Y., 2003.

143. Elliott, R., P. Kopp. Mathematics of Financial Markets. Springer-Verlag New York Inc., 1998.

144. Fabozzi, F. Bond Portfolio Management (second edition). Frank J. Fabozzi Associates New Hope, Pennsylvania, 2001.

145. Georgieva, P., I. Popchev. Application of Q-Measure in a Real Time Fuzzy System for managing Financial Assets. International Journal of Soft Computing (IJSC), Vol. 3, 2012, No. 4, 21-38.

146. Georgieva, P., I. Popchev, S. Stoyanov. A Multi-Step Procedure for Asset Allocation in Case of Limited Resources. - Cybernetics and Information Technologies Vol. 15, No 3, 2015, 41-51, Print ISSN: 1311-9702, Online ISSN: 1314-4081, DOI: 10.1515/cait-2015-0040.

147. Georgieva P., I. Popchev. Cardinality Problem in Portfolio Selection. – Lecture Notes in Computer Science 7824. Adaptive and Natural Computering Algorithms.

Proceedings 11th International Cpnference, ICANNGA 2013, Lausanne, Switzerland, April 4-6, 2013. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013, pp. 208-217. ISBN 978-3-642-37212-4.

148. Georgieva P., I. Popchev. Fuzzy Q-measure Model for Managing Financial Investments. - Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences, tome 66, 2013, №5, 651-658. ISSN 1310-1331.

149. Hull, J. Option, Futures, and Other Derivative Securities. Prentice-Hall Inc., New Jersey, 2000.

150. Ivanova, Z., K. Stoilov, T. Stoilov. Portfolio Optimization – Internet Information Service. Sofia, Academic Publishing House "Prof. M. Drinov", 2005. 275 p. ISBN 954-322-021-2 (in Bulgarian).

151. Jorion, P. Financial Risk Manager Handbook. J. Wiley Publishing, N.Y., 2003.

152. Konabar, V., R. D, Warburton. MBA Fundamentals: Project Management. Kaplan Publishing, New York, 2008.

153. Markowitz, H. M. Portfolio Selection. Efficient Diversification of Investments (second ed.), Blackwell Publishers, Inc., Cambridge, MA, and Oxford, UK, 1995, 384.

154. Marshall, J., V. Bansal. Financial Engineering. New York Institute of Finance, Allyn and Bacon Inc., N.Y., 1992.

155. Mastering Risk. Volume 1. Concepts (executive editor James Pickford). Financial Times Mastering Pearson Education Limited, N.Y., 2001.

156. Mavrov, D., **Radeva, I.**, Atanassov, K., **Doukovska, L.**, Kalaykov, I.. InterCriteria Software Design: Graphic Interpretation within the Intuitionistic Fuzzy Triangle. Proc. of the International Symposium on Business Modeling and Software Design – BMSD'15, Milan, Italy, SCITEPRESS - Science and Technology Publications, 2015, ISBN:978-989-758-111-3, 279 – 283.

157. Nenovsky, N., A. Lahiani, P. Chobanov. Empirical investigation of systemic risk in the new EU states. – Economics Bulletin, Vol. 31, 2011, No. 2, 1401-1412.

158. Nenovsky, N. P. Villien. EU enlargement and monetary regimes from the insurance model perspective. – Post-Communist Economies, 2011, 23(4), 433-447.

159. Popchev, I., I. Radeva. An investment preference under incomplete data. In: Proceedings DECOM-TT 2004, Automatic Systems for Bulding the Infrastructure in Developing Countries, Regional and Global Aspects (Bansko, Bulgaria October 3-5, 2004), 2004, 243-248.

160. Popchev, I., I. Radeva. Decision support system for investment preference evaluation under conditions of incomplete information. In: Proc. 3rd Intern. Conference "Information Research, Applications and Education" (Ed. K. Markov), 27-30 June 2005, Varna, 189-190.

161. Popchev, I., I. Radeva. A decision support method for investment preference evaluation. – Cybernetics and Information Technologies, Vol. 6, 2006, No. 1, 3-16, ISSN: 1311-9702.

162. Popchev, I., I. Radeva. MAP-Cluster: An approach to latent cluster identification. In: Proc. IFAC-CEFIS `2007 "Synergy of Computational Economics and Financial and Industrial Systems" (Eds. G. M. Dimirovski, F. Ulengin), Istanbul, October 9-11, 2007, 63-67.

163. Popchev, I., I. Radeva. Multi-Criteria Scheme for MAP-Cluster Identification. - Problems of Engineering Cybernetics and Robotics, Vol. 58, 2007, 3-12, ISSN: 0204-9848.

164. Popchev, I., N. Velinova. Application of Monte Carlo simulation in princing of options. - Cybernetics and Information Technologies, Vol. 3, 2003, No. 2, 74-91, ISSN: 1311-9702.

165. Popchev, I., N. Velinova. Software decision for neutral portfolio of securities. - Cybernetics and Information Technologies, Vol. 5, 2005, No. 1, 14-34, ISSN: 1311-9702.

166. Radeva, I., Multi-Criteria Models for Cluster Design, in-: Cybernetics and Information Technologies, Vol. 13, No. 1, Sofia 2013, pp. 18-33, Print ISSN-9702, E ISSN 1314-4081.

- 2012 Best Personal Finance Software Comparisons and Reviews http://personal-finance-software-review.toptenreviews.com/
- Top 5 Personal Finance Software packages http://simeyc.hubpages.com/hub/Personal-Finance-Software-packages
- Best Free Personal Finance Software http://www.techsupportalert.com/best-free-personal-finance-software.htm

Учебникът включва основни теми по дисциплината “Управление на риска” в няколко магистърски програми: математически модели в икономиката (СУ “Св. Климент Охридски”), бизнес администрация (Нов български университет), финанси (Нов български университет), финансов мениджмънт (ПУ “Паисий Хилендарски”) и бизнес информационни технологии (Бургаски свободен университет).

Учебникът е построен с използване на теоретични резултати, решени числови примери, схеми и графики. Такава структура на учебника позволява отделни теми и числови примери да предизвикат интерес в докторанти, както и други преподаватели и студенти от магистърски и бакалавърски програми на българските университети.

Свободният достъп на този учебник поради нарастващия интерес към управлението на риска привлича вниманието и на специалисти от практиката.

Източници на български и английски език предават на учебника и справочен характер.

Учебникът включва основни теми по дисциплината “Управление на риска” в няколко магистърски програми: математически модели в икономиката (СУ “Св. Климент Охридски”), бизнес администрация (Нов български университет), финанси (Нов български университет), финансов мениджмънт (ПУ “Паисий Хилендарски”) и бизнес информационни технологии (Бургаски свободен университет).

Учебникът е построен с използване на теоретични резултати, решени числови примери, схеми и графики. Такава структура на учебника позволява отделни теми и числови примери да предизвикат интерес в докторанти, както и други преподаватели и студенти от магистърски и бакалавърски програми на българските университети.

Свободният достъп на този учебник поради нарастващия интерес към управлението на риска привлича вниманието и на специалисти от практиката.

Източници на български и английски език предават на учебника и справочен характер.

eISSN: 2367-8666