

**ИНСТИТУТ ПО ИНФОРМАЦИОННИ И
КОМУНИКАЦИОННИ ТЕХНОЛОГИИ**

БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ

Петя Тодорова Боянова

**ОПТИМАЛНИ МНОГОНИВОВИ МЕТОДИ ЗА
НЕКОНФОРМНИ КРАЙНИ ЕЛЕМЕНТИ**

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

**на дисертация за получаване на
*образователна и научна степен „Доктор“***

Научна специалност: 01.01.09 „Изчислителна математика“

Професионално направление: 4.5. „Математика“

Научен ръководител:

проф. дмн Светозар Маргенов

София, 2011 г.

Дисертационният труд е обсъден и допуснат до защита на разширено заседание на секция „Научни пресмятания“ при ИИКТ-БАН, състояло се на 08.09.2011г.

Дисертационният труд съдържа 135 страници, в които 18 фигури, 16 таблици и 9 страници литература, включваща 79 заглавия.

Автор: Петя Тодорова Боянова

Заглавие: Оптимални многонивови методи за неконформни крайни елементи

Обща характеристика на дисертационния труд

Обзор на изследваната област и актуалност на темата

Много от най-значимите достижения в съвременната наука и технология се дължат на напредъка в областта на компютърното моделиране. Ефективността на този сложен интердисциплинарен процес при намирането на решение на различни задачи в приложната и научна области на човешкото знание, се основава на работата и успехите в съвкупност от научни направления. Компютърното моделиране включва създаване на: а) математически модел, адекватно описващ съответния реален феномен; б) числени методи за дискретизация на диференциалните и/или интегрални уравнения; в) ефективни методи и алгоритми за решаване на получените след дискретизацията системи от линейни алгебрични уравнения; г) алгоритми за визуализация и анализ на резултатите от проведените числени експерименти; д) високопроизводителни компютърни програми, които в максимална степен използват възможностите и архитектурата на съвременните изчислителни системи. Компютърният модел дава възможност не само за икономии при скъпо струващи лабораторни и практически експерименти. В редица случаи още по-важно е моделирането на характеристиките на нови материали и технологии, както и изследването на процеси, за които измерванията и наблюденията са невъзможни.

Основни средства за дискретизация на диференциални уравнения са методът на крайните елементи и методът на крайните разлики, вж. напр. [26, 28, 3]. След тяхното прилагане, задачата се свежда до система от линейни алгебрични уравнения [1, 2]. Едно от най-важните свойства на тези системи е, че съответните матрици са разреждени. Това означава, че броят на ненулевите елементи във всеки ред или стълб е ограничен от константа, която не зависи от параметъра на дискретизация на съответния метод и следователно не зависи от размерността на дискретната задача, която се увеличава с намаляването на дискретизационния параметър. Известно е, че решаването на задачи на изчислителната линейна алгебра с разреждени матрици е определящо за ефективността на доминиращата част от съществуващите програми за компютърно моделиране на процеси, които се описват с диференциални уравнения [9, 2]. Това е особено важно при решаване на сложни задачи с голяма размерност. Понятието голяма размерност се променя с нарастване на производителността на изчислителната техника, но независимо от огромния прогрес в това отношение, определящи за развитието на компютърното моделиране са постиженията в областта на числените методи и алгоритмите за тяхната реализация. Резултатите представени в настоящата дисертация са в тази област.

Методът на крайните елементи (МКЕ) и методът на крайните разлики са представители на така наречените мрежови методи и при определени

предположения матриците на получаваните линейни системи са с близки свойства и дори могат да съвпадат. Независимо от това, методът на крайните елементи има определени предимства по отношение на общността и алгоритмите за неговата реализация. Изследванията в дисертацията системно използват терминологията и свойствата на метода на крайните елементи.

Дискретизацията с конформни линейни крайни елементи е най-подробно изучения случай на прилагане на МКЕ, но в редица важни приложения неконформните крайни елементи имат сериозни предимства. Например, при числено моделиране на течения в силно хетерогенни порести среди, методът на крайните обеми и смесеният метод на крайните елементи притежават доказано добра точност и локална консервативност (на масата). При прилагането на смесен МКЕ, непрекъснатостта на скоростта по направление на нормалата към границата между два крайни елемента може да се наложи чрез Лагранжеви множители. В [4] Arnold и Brezzi показват, че след елиминирание на неизвестните на налягането и скоростта от алгебричната система, задачата за Лагранжевите множители с допълнението на Шур е еквивалентна на дискретизация на елиптична задача чрез метод на Галборкин с линейни неконформни крайни елементи. По-точно, в [4] е показано, че апроксимация със смесен метод с крайни елементи на Равиар-Тома от най-нисък ред е еквивалентна на апроксимация с неконформни крайни елементи на Крозе-Равиар, при която крайно-елементното пространство е допълнено с кубични базисни функции, всяка от които има за носител един краен елемент.

Друго приложение на неконформните елементи, в частност, на елементите на Крозе-Равиар, на което искаме да обърнем внимание, е свързано с итерационни методи за решаване на задачи, дискретизирани с прекъснат метод на Галборкин (Discontinuous Galerkin – DG). В [5], Ayuso de Dios и Зикатанов предлагат равномерно сходящи итерационни методи, които се основават на естествено разделяне на пространството на DG елементите от първи ред на директна сума от крайно-елементното пространство на Крозе-Равиар и подпространство, което съдържа функции, непрекъснати по вътрешни за областта интерфейси между елементите.

Това са някои от причините за специалния интерес към прилагане на неконформните крайни елементи за ефективно числено решаване на диференциални уравнения, което е предмет на настоящата дисертация.

Ако разгледаме елиптична гранична задача в областта $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ и за нейното числено решаване приложим мрежов числен метод, то при много общи предположения диференциалната задача се свежда до система от линейни алгебрични уравнения със симетрична и положително определена матрица A с размерност $N \times N$. Основните методи за решаване на такъв клас линейни системи най-общо се разделят на два вида – преки и

итерационни. Методът на Холецки е един от най-добре известните преки методи. Предполага се, че той отчита лентовата структура или профила на матрицата при подходяща номерация на неизвестните и при определени предположения има изчислителна сложност $\mathcal{O}(N^2)$. Методът на вложените сечения (Nested Dissection), вж. напр. [9], е най-бързият измежду преките методи. В основата на този метод е рекурсивното разделяне на графа, представящ структурата на ненулевите елементи на матрицата A , а изчислителната му сложност е $\mathcal{O}(N^{3/2})$. Един от най-популярните итерационни методи е методът на спрегнатия градиент. Той има сложност, която асимптотично съвпада със сложността на най-добрия пряк метод. По тази причина е прието, че предимствата на итерационните методи за решаване на задачи с достатъчно голяма размерност са безспорни.

Итерационните методи в подпространства на Крилов са в класацията на десетте най-значими постижения в областта на алгоритмите през ХХ век. Методът на спрегнатия градиент и неговото обобщение, методът на спрегнатия градиент с преобуславяне, са съвременни методи от вариационен тип в подпространства на Крилов, вж. напр. [7, 9, 26]. Ефективността на метода на спрегнатия градиент с преобуславяне се определя от качествата на преобусловителя. Важна роля в развитието на методите за решаване на линейни системи играят изследванията в областта на конструирането на така наречените оптимални преобусловители, за които изчислителната сложност на метода на спрегнатия градиент с преобуславяне е $\mathcal{O}(N)$.

В съвременната теория на оптималните итерационни методи, основна роля играят методите построени върху последователност от мрежи (триангулации). Тези методи се разделят на многомрежови (multigrid), [27, 38] и многонивови (multilevel), [12, 16, 17, 41, 48, 55]. По традиция първата група се счита, че използва повече свойствата на диференциалната задача, докато при втората група конструкцията е в значителна степен алгебрична и се реализира в термините на метода на крайните елементи и съответните матрици на коравина. Историята на рекурсивните итерационни методи, използващи последователност от вложени мрежи, води началото си от работата на Р. Федоренко [33], публикувана през 1961 г. През 1987 г. П. Василевски, Р. Лазаров и С. Маргенов [48] конструират почти оптимален алгебричен многонивов метод. Решителна следваща стъпка в тази област е направена в работите на Axelsson и Василевски [16, 17], където са въведени АМЛІ методите. Тук за първи път са получени оптимални оценки, за които не се предполага допълнителна регулярност на решението на диференциалното уравнение. Както и в други дялове на математиката, напълно заслужено можем да говорим за българска школа в областта на оптималните алгебрични итерационни многонивови методи. Основни приноси в това направление са публикувани в работите на П. Василевски, Р. Лазаров, С. Маргенов.

Методология на изследването

Понятията изчислителна сложност и скорост на сходимост са основни в методологията на изследване в дисертацията. Получените резултати имат конструктивен характер, като всички предложени и изследвани методи имат ясна алгоритмична структура.

Методът на спрегнатия градиент с преобуславяне е в основата на съвременните итерационни методи. Неговата ефективност се определя от скоростта на сходимост и изчислителната сложност на решаването на система с преобусловителя. Спектралното число на обусловеност $\kappa(C^{-1}A)$ на преобусловената матрица е мярка за скоростта на сходимост на метода. Така например, за оптимални многонивови методи $\kappa(C^{-1}A) = \mathcal{O}(1)$ и броят на итерациите, достатъчни за получаване на решение с предварително зададена точност, е ограничен от константа, която не зависи от размерността на дискретната задача.

В случая на многонивови преобусловители, числото на обусловеност зависи от константата в усиленото неравенство на Коши-Буняковски-Шварц (КБШ). В дисертацията са представени нови оптимални многонивови методи. Използваният апарат на изследване включва конструиране на спектрално еквивалентни приближения за специални класове матрици, възникващи в процеса на многонивова факторизация и получаване на нови равномерни оценки на константата в усиленото неравенство на КБШ. Направена е програмна реализация на представените в дисертацията методи и алгоритми, проведени са числени експерименти и са анализирани получените числени резултати.

Цели на дисертационния труд

Основните цели на изследванията в дисертацията са:

- Разработване и изследване на оптимални преобусловители от класа на алгебричните многонивови методи (AMLI) за двумерни параболични задачи, дискретизирани с линейни неконформни крайни елементи на Крозе-Равиар.
- Разработване и изследване на оптимални многонивови методи за двумерни елиптични задачи в смесена форма, дискретизирани с неконформни крайни елементи.
- Създаване на съставен метод за нестационарните уравнения на Навие-Стокс, основан на оптимални многонивови преобусловители за системите, получени при устойчива локално консервативна дискретизация с неконформни крайни елементи.

Работата по дисертацията има за цел, както теоретично изследване на предложените методи, така и програмна реализация и анализ на резултатите от числени експерименти.

Списък на публикациите по дисертацията

Научни публикации в списания и периодични издания:

- P. Boyanova, S. Margenov, *Multilevel Splitting of Weighted Graph-Laplacians Arising in Non-conforming Mixed FEM Elliptic Problems*, Numerical Analysis and Its Applications, Springer LNCS **5434**, 2009, 216–223.
- P. Boyanova, S. Margenov, *Numerical Study of AMLI Methods for Weighted Graph-Laplacians*, Large-Scale Scientific Computing, Springer LNCS **5910**, 2010, 84–91.
- P. Boyanova, S. Margenov, *On Optimal AMLI Solvers for Incompressible Navier-Stokes Problems*, AIP Conference Proceedings vol. 1301, 2010, 457-467.
- P. Boyanova, S. Margenov, M. Neytcheva, *Robust AMLI Methods for Parabolic Crouzeix-Raviart FEM Systems*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 235(2) (2010), 380–390.
- P. Boyanova, S. Margenov, *On Multilevel Iterative Methods for Navier-Stokes Problems*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 40, Number 1, 2010, 51–60.

Глави в книги:

- P. Boyanova, S. Margenov, *Robust Multilevel Methods for Elliptic and Parabolic Problems*, invited chapter in: O. Axelsson, J. Karatson, Efficient preconditioning methods for elliptic partial differential equations, Bentham Science Publishers, 2011, 3–22.

В процес на рецензиране:

- P. Boyanova, I. Georgiev, S. Margenov, L. Zikatanov, *Multilevel Preconditioning of Graph-Laplacians: Polynomial Approximation of the Pivot Blocks Inverses*.

Една от представените публикации по дисертацията е в списанието “Journal of Computational and Applied Mathematics” с “импакт фактор” 1.029 за 2010 година.

Апробация на резултатите

Съществени части от дисертацията са представени на следните специализирани международни научни конференции: 4th Conference on “Numerical Analysis and Applications”, Lozenetz, Bulgaria, 2008; 7th International Conference on “Large-Scale Scientific Computations”, Sozopol, Bulgaria, 2009; 4th IMACS Conference on “Mathematical Modelling and Computational Methods in Applied Sciences and Engineering”, Roznov pod Radhostem, Czech Republic, 2009; 7th Conference on Numerical Methods and Applications – NM&A’10, Borovets, Bulgaria, 2010; Emerging Topics in Dynamical Systems and Partial Differential Equations – DSPDEs’10, Barcelona, Spain, 2010.

Резултати от дисертацията са докладвани и в рамките на: Информационни дни по проекта Bulgarian IST Center of Competence in 21 Century (BIS-21++), Боровец, България, 2007; 3rd Annual meeting of BGSIAM’08, Sofia, Bulgaria, 2008; Workshop on “Numerical Methods and High Performance Computations”, IPP-BAS, Sofia, Bulgaria, 2009.

Участие в научни проекти

- Център за върхови научни постижения “Суперкомпютърни приложения”, фонд “Научни изследвания”, ДО02-115/2008
- Методи, алгоритми и софтуерни средства за задачи с голяма размерност и йерархични компютърни модели, фонд “Научни изследвания”, ДО02-147/2008
- Развитие на методите на механиката на непрекъснати среди чрез числени и аналитични приложения на вариационни принципи, фонд “Научни изследвания”, ДО02-338/2008
- Адаптивни и йерархични алгоритми в метода на крайните елементи, фонд “Научни изследвания”, VU-MI-202/2006
- Finite element preconditioners for algebraic problems as arising in modelling of multiphase microstructures, 2009/2011, Swedish Research Council (VR)

Съдържание на дисертацията

Настоящата дисертация се състои от увод, четири глави, заключение и списък на цитираната литература. Основното съдържание е поместено на 108 страници, а изложението е придружено с фигури и таблици. Списъкът на цитираната литература съдържа 79 заглавия.

Глава 1. Въведение

Първата глава има въвеждащ характер. В нея са представени известни факти, използвани на различни етапи от изследванията в дисертацията.

В началото накратко представяме метода на крайните елементи и неговите основни свойства. МКЕ е сред основните средства за числено решаване на диференциални уравнения [3, 9, 26, 29], наложило се поради елегантната математическа формулировка и широката употреба за числено решаване на важни (класове от) задачи с приложения в техническите, медицински, естествени и други науки. МКЕ е техника за избор на крайномерно подпространство \mathcal{V}_h , в което търсим приближено решение на диференциалната задача във вариационна форма. Най-често използваните в МКЕ подпространства съдържат функции, които са на части полиноми върху разделяне (триангулация) \mathcal{T}_h на областта, наричано още крайно-елементна *мрежа*.

Когато пространството \mathcal{V}_h не принадлежи на Соболевото пространство \mathcal{V} , за което е дефинирана вариационната задача, МКЕ се нарича *неконформен* метод, т.е., дискретизация с неконформни крайни елементи. Пример за неконформни елементи са крайните елементи на Крозе-Равиар, вж. напр., [26].

Намирането на приближено решение u_h чрез МКЕ се свежда до решаване на система линейни алгебрични уравнения с голяма размерност,

$$A\mathbf{u} = \mathbf{b},$$

където $\mathbf{u} = \{u_i\}_{i=1}^N$ е неизвестният вектор, $u_h = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i$. Базисните функции $\phi_i \in \mathcal{V}_h$ имат локален носител и по конструкция във всеки ред от матрицата на системата има само не голям брой различни от нула елементи, т.е. $A \in \mathbf{R}^{N \times N}$ е *разредена* матрица. В случая на МКЕ дискретизации на елиптични задачи от втори ред, A е симетрична и положително определена.

Раздел 1.2 е посветен на итерационни методи за решаване на системи линейни уравнения с разредени матрици. Първо е представен методът на спрегнатия градиент. Важно негово свойство е, че направленията на търсене са взаимно ортогонални по отношение на енергетичното скалярно произведение. Оценка за скоростта на сходимост на този метод се дава от следната теорема.

Теорема 1.2.2. *В сила е неравенството*

$$it(\epsilon) \leq \frac{1}{2} \sqrt{\kappa(A)} \ln(2/\epsilon) + 1, \quad (1)$$

където с $it(\epsilon)$ е означено най-малкото цяло положително число n , за което n -тото приближение $\mathbf{x}_{(n)}$, пресметнато чрез метода на спрегнатия

градиент удовлетворява условието

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{(n)}\|_A \leq \epsilon \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{(0)}\|_A, \quad \forall \mathbf{x}_{(0)} \in \mathbf{R}^N.$$

Според Теорема 1.2.2, броят итерации в метода на спрегнатия градиент, необходими за достигане на желана относителна точност, зависи от спектралното число на обусловеност на матрицата на системата. В частност, броят итерации за елиптически задачи от втори ред расте пропорционално на $\mathcal{O}(\sqrt{N})$.

С цел подобряване на сходимостта в случая на решаване на лошо обусловени системи, се прилага така наречената техника на преобуславяне. Методът на спрегнатия градиент с преобуславяне се е наложил като предпочитан итерационен метод за решаване на системи линейни алгебрични уравнения с разредени симетрични и положително определени матрици. Той се извежда, като методът на спрегнатия градиент се приложи за трансформираната (преобусловена) система $\tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}$, където $\tilde{A} = C^{-\frac{1}{2}}AC^{-\frac{1}{2}}$, $\tilde{\mathbf{x}} = C^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}$, а $\tilde{\mathbf{b}} = C^{-\frac{1}{2}}\mathbf{b}$. В алгоритъма не е необходимо явно да се използва представянето $C = C^{\frac{1}{2}}C^{\frac{1}{2}}$ на преобусловителя (вж. напр., [37]), така че на практика се работи директно със самата матрица C . Теорема 1.2.2 може да се приложи за определяне на скоростта на сходимост и на метода на спрегнатия градиент с преобуславяне, като този път в оценката (1) участва спектралното число на обусловеност на преобусловената матрица, $\kappa = \kappa(C^{-1}A)$. От оценката на скоростта на сходимост и конструкцията на метода следва следната обща стратегия за конструиране на ефективни преобусловители (вж. напр. [7, 52]). Целта е матрицата C да удовлетворява следните две условия:

- Да съществува ефективен алгоритъм за решаване на системи с преобусловителя C , с изчислителна сложност много по-малка от сложността на решаване на системи с оригиналната матрица, т.е., $\mathcal{N}(C^{-1}\mathbf{x}) \ll \mathcal{N}(A^{-1}\mathbf{x})$.
- Относителното число на обусловеност на преобусловената матрица да е съществено по-малко от това на изходната матрица, т.е., $\kappa(C^{-1}A) \ll \kappa(A)$.

Дефиниция 1.2.1. *Казваме, че преобусловителят C е оптимален, когато $\mathcal{N}(C^{-1}\mathbf{x}) = \mathcal{O}(N)$ и $\kappa(C^{-1}A) = \mathcal{O}(1)$, където с N е означена размерността на системата.*

Така нареченият обобщен метод на спрегнатия градиент с преобуславяне позволява използването на различни (променящи се) преобусловители на различни итерации, вж. напр. [6, 10, 18, 19, 51]. Основната разлика по отношение на стандартния метод на спрегнатия градиент е, че поради по-общия вид на преобусловителя, ортогоналността на направленията на

търсене не е гарантирана и трябва да се наложи експлицитно. Като резултат, обобщеният метод на спрегнатия градиент с преобуславяне е по-скъп от стандартния метод на спрегнатия градиент с преобуславяне.

В Раздел 1.3 е направено въведение в теорията на оптималните алгебрични многонивови методи. Алгебричният многонивов преобусловител (от английски: Algebraic MultiLevel Iteration method – AMLI) е оптимален преобусловител, предложен за първи път в [16, 17] за случая на елиптическа задача, дискретизирана с конформни линейни крайни елементи. По-късно методът е обобщен за неконформни дискретизации, прекъснат метод на Гальоркин, предложени са и нелинейни алгоритми (вж. напр. [22, 23, 24, 34, 40, 42, 45, 46, 47, 50] и цитиранията, представени там).

Многонивовите методи представляват рекурсивно обобщение на съответните двунивови методи. Нека A е симетрична положително полуопределена матрица със следното блочно две на две представяне:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

където блокът A_{11} е неособен. В сила е следната точна факторизация:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \\ A_{21} & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & A_{11}^{-1}A_{12} \\ & I_2 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

където $S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ е *допълнението на Шур*.

Различни техники на преобуславяне се основават на апроксимиране на (някои от) блоковете в (3). Ефективността на преобусловителите, основани на блочна факторизация, силно зависи от свойствата на разделянето (2), което се характеризира с *константата в усиленото неравенство на Коши-Буняковски-Шварц* (КБШ).

Нека $W = V_1 \times V_2$ е разделяне на векторното пространство, съгласувано по размерност с блочното представяне (2), а $\mathbf{v}_i \in V_i$, $i = 1, 2$ и $W_1 = \{\mathbf{v} = [\mathbf{v}_1^T, \mathbf{0}^T]^T\}$, $W_2 = \{\mathbf{v} = [\mathbf{0}^T, \mathbf{v}_2^T]^T\}$.

Константата в усиленото неравенство на КБШ се дефинира като минималната положителна константа γ , удовлетворяваща за всеки ненулеви $\mathbf{v}_i \in V_i$, $i = 1, 2$, неравенството

$$|\mathbf{v}_1^T A_{12} \mathbf{v}_2| \leq \gamma \{ \mathbf{v}_1^T A_{11} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2^T A_{22} \mathbf{v}_2 \}^{1/2}. \quad (4)$$

Следните три лема (вж. напр. [7, 32]) са основата за извеждане на теоретични оценки на константата в усиленото неравенство на КБШ.

Лема 1.3.2. *Нека A е симетрична положително полуопределена матрица, A_{11} е положително определена, а γ е най-малката константа, за която е изпълнено (4). Тогава:*

(а) $\gamma \leq 1$.

(б) $\gamma = 1$ ако съществува $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \in \ker(A)$ за което $\mathbf{v}_2 \notin \ker(A_{22})$.

(в) $\gamma < 1$ ако за всяко $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \in \ker(A)$ е изпълнено $\mathbf{v}_2 \in \ker(A_{22})$.

(г) При предположенията във (в),

$$\gamma = \sup_{\mathbf{v}_i \in V_i \setminus \ker(A_{ii}), i=1,2} \frac{\mathbf{v}_1^T A_{12} \mathbf{v}_2}{(\mathbf{v}_1^T A_{11} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2^T A_{22} \mathbf{v}_2)^{1/2}}.$$

Лема 1.3.3. Нека A е симетрична положително полуопределена матрица, изпълняваща условието (в) от Лема . Тогава

(а)

$$\gamma^2 = \sup_{\mathbf{v}_2 \in V_2 \setminus \ker(A_{22})} \frac{\mathbf{v}_2^T A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2^T A_{22} \mathbf{v}_2}. \quad (5)$$

(б) за всяко $\mathbf{v}_2 \in V_2 \setminus \ker(A_{22})$

$$1 - \gamma^2 \leq \frac{\mathbf{v}_2^T S \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2^T A_{22} \mathbf{v}_2} < 1, \quad (6)$$

където лявото неравенство е точно, а дясното е точно, ако $\ker(A_{12}) \neq \{0\}$.

Нека предположим, че матрицата на системата може да се представи като

$$A = \sum_{E \in \mathcal{E}} A_E, \quad \mathbf{v} = \sum_{E \in \mathcal{E}} \mathbf{v}_E, \quad (7)$$

където A_E са симетрични положително полуопределени локални матрици, \mathcal{E} е множество от индекси, а сумирането е в смисъл на асемблиране. По естествен начин глобалното разделяне на векторното пространство определя две на две блочно представяне на локалните матрици A_E и съответните вектори \mathbf{v}_E ,

$$A_E = \begin{bmatrix} A_{E:11} & A_{E:12} \\ A_{E:21} & A_{E:22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_E = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{E:1} \\ \mathbf{v}_{E:2} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Лема 1.3.4. Нека локалните матрици A_E , $E \in \mathcal{E}$, удовлетворяват условието (в) на Лема . Нека също така $V_{E:i}$, $i = 1, 2$ е естествената рестрикция на V_i , породена от локалната матрица A_E . Тогава

$$\gamma \leq \max_{E \in \mathcal{E}} \gamma_E < 1 \quad (9)$$

където с γ_E сме означили локалната константа в усиленото неравенство на КБШ, отговаряща на A_E , т.е.,

$$\gamma_E^2 = \sup_{\mathbf{v}_{E:2} \in V_{E:2} \setminus \ker(A_{E:22})} \frac{\mathbf{v}_{E:2}^T A_{E:21} A_{E:11}^{-1} A_{E:12} \mathbf{v}_{E:2}}{\mathbf{v}_{E:2}^T A_{E:22} \mathbf{v}_{E:2}}. \quad (10)$$

Класическата теория на оптималните двунивови методи за задачи, дискретизирани с МКЕ, за първи път е представена в [11, 20], вж. също [8]. Основната задача в конструирането на двунивови преобусловители, е да се избере подходящо разделяне на матрицата на коравина, така че константата в усиленото неравенство на КБШ да е далеч от единица. Общият подход за получаване на блочно две-на-две представяне на матрицата на системата се базира на дефинирането на две вложени крайно-елементни пространства $\mathcal{V}_H \subset \mathcal{V}_h$, съответстващи на последователни равномерни сгъстявания на мрежата.

Нека $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_1 \subset \dots \subset \mathcal{T}_\ell$ са триангулации, получени чрез последователно равномерно сгъстяване на дадена начална мрежа \mathcal{T}_0 , с брой на възлите съответно $N_0 < N_1 < \dots < N_\ell$. Ще използваме следните означения: $C^{(k)}$ е преобусловител на крайно-елементна матрица $A^{(k)}$, съответстваща на мрежата \mathcal{T}_k , получена след k рафинирания на \mathcal{T}_0 , ($0 \leq k \leq \ell$). Матриците $\tilde{A}^{(k)}$ са йерархични матрици на ниво k , получени с помощта на двунивови йерархични трансформации дефинирани от разреждени матрици $J^{(k)}$, т.е., $\tilde{A}^{(k)} = J^{(k)} A^{(k)} (J^{(k)})^T = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11}^{(k)} & \tilde{A}_{12}^{(k)} \\ \tilde{A}_{21}^{(k)} & \tilde{A}_{22}^{(k)} \end{bmatrix}$ Целта е да се построи преобусловител $C^{(\ell)}$ за матрицата $A^{(\ell)} := A_h$ на най-фината мрежа.

Конструкцията на АМЛІ метода е рекурсивна, като $C^{(0)} := A^{(0)}$. Нека АМЛІ преобусловителят на ниво $k-1$ е $C^{(k-1)}$, тогава $C^{(k)}$ на ниво k се дефинира като

$$C^{(k)} := (J^{(k)})^{-1} \begin{bmatrix} C_{11}^{(k)} & \mathbf{0} \\ \tilde{A}_{21}^{(k)} & Z^{(k-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^{(k)} & (C_{11}^{(k)})^{-1} \tilde{A}_{12}^{(k)} \\ \mathbf{0} & I_2^{(k)} \end{bmatrix} (J^{(k)})^{-T}, \quad (11)$$

където разрежданата матрица $C_{11}^{(k)}$ е подходяща апроксимация на водещия диагонален блок $\tilde{A}_{11}^{(k)}$. При линейният АМЛІ метод допълнението на Шур се апроксимира чрез

$$Z^{(k-1)} := A^{(k-1)} \left(I - P_{\beta_k} (C^{(k-1)})^{-1} A^{(k-1)} \right)^{-1}, \quad (12)$$

където P_{β_k} е полином от степен β_k със свойството $P_{\beta_k}(0) = 1$. Може да се покаже, че (12) е еквивалентно на

$$Z^{(k-1)-1} = C^{(k-1)-1} Q_{\beta_{k-1}}(A^{(k-1)} C^{(k-1)-1}) \quad (13)$$

където полиномът $Q_{\beta_{k-1}}$ е от степен $k-1$.

Нека константите γ_k в усиленото неравенство на КБШ, съответстващи на нивата на съгъстяване на мрежата $1 \leq k < \ell$, са равномерно ограничени от числото $\gamma < 1$, т.е. $\gamma_k \leq \gamma$. Следното достатъчно условие за оптималност на линейния АМЛІ метод е в сила за степента $\beta_k = \beta$ на стабилизиращия полином (вж. напр. [17, 18], както и [42]):

$$\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} < \beta < \rho, \quad (14)$$

където $\rho = \min_k \frac{N_k}{N_{k-1}}$. Ако неравенствата (14) са изпълнени, то съществува полином P_β , така че съответният линейен АМЛІ метод има оптимална скорост на сходимост и оптимална изчислителна сложност.

Нека за симетричните положително определени матрици $C_{11}^{(k)}$ е изпълнено условието

$$\mathbf{v}^T \tilde{A}_{11}^{(k)} \mathbf{v} \leq \mathbf{v}^T C_{11}^{(k)} \mathbf{v} \leq (1+\xi) \mathbf{v}^T \tilde{A}_{11}^{(k)} \mathbf{v}, \quad \text{за всяко } \mathbf{v}. \quad (15)$$

Тогава, за случая $\beta = 2$, коефициентите q_0 и q_1 на полинома $Q_1(y) = q_0 + q_1 y$ с оптимални стабилизиращи свойства в АМЛІ W-цикъла, могат да се пресметнат по следните формули (вж. напр. [17, 35]):

$$q_0 = \frac{2}{\omega}, \quad q_1 = \frac{-1}{1-\gamma^2 + \xi(1-2\omega)}, \quad \omega = \sqrt{1+\xi + \xi^2 - \gamma^2} - \xi. \quad (16)$$

При конструиране на АМЛІ методи важна роля играят следните два аспекта:

- (а) Равномерна оценка на константата в усиленото неравенство на КБШ $\gamma < 1$, която определя качеството на двунивовите разделяния по нива и е необходима за конструиране на стабилизиращия полином;
- (б) Избор на подходящи преобусловители $C_{11}^{(k)}$ за водещите диагонални блокове $\tilde{A}_{11}^{(k)}$, който влияе както на относителното число на обусловеност, така и на общата изчислителна сложност.

В [17] е показано, че относителното число на обусловеност на АМЛІ метода удовлетворява оценката:

$$\kappa(C^{(l)})^{-1} A^{(l)} \approx (1+\xi)/(1-\gamma^2). \quad (17)$$

Освен с помощта на матричен полином, стабилизация може да бъде постигната и чрез прилагане на определен брой вътрешни итерации. За разлика от стандартния линейен АМЛІ, полученият по този начин метод не

включва необходимостта от определяне на параметри, но води до нелинеен алгоритъм с променливо преобуславяне. Разглежданият в дисертацията нелинеен AMLI алгоритъм (вж. също [19, 15, 54]), известен като NLAMLI, е представен, например, в [42, 40].

Глава 2. Многонивови методи за линейни параболични задачи

Разглеждаме параболичната задача

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot (\mathbf{a}(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}, t)) &= f(\mathbf{x}, t) \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \\ u(\mathbf{x}, 0) &= u_0(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D, \quad (\mathbf{a}(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \mathbf{x} \in \Gamma_N, \end{aligned} \quad (18)$$

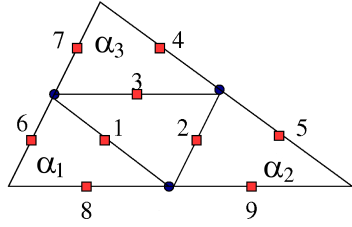
където $\Omega \in \mathbf{R}^2$ е многоъгълна област, $f \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ е ограничена, симетрична положително определена матрица с на части гладки функции $a_{ij}(\mathbf{x})$ върху $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

След дискретизация чрез МКЕ и θ -метод, на всяка стъпка по времето $t_n \in [0, T]$, $t_0 = 0$, $t_n = t_{n-1} + \Delta t$ търсим приближени решения \mathbf{u}^n на дискретизираната параболична задача (18) като решения на линейни системи във вида:

$$(M + \Delta t(1 - \theta)K) \mathbf{u}^n = \mathbf{g}^n, \quad (19)$$

където дясната част зависи от приближеното решение, пресметнато на предходна стъпка по времето. В структурата на матрицата на системата на дискретната параболична задача участват матрица на коравина K и матрица на масата M . Предложените в дисертацията многонивови методи за решаване на системи от този вид, получени при дискретизация с крайни елементи на Крозе-Равиар, се основават на така наречените “differences and aggregates” – DA (“разлики и агрегати”) и “first reduce” – FR (“първоначално изключване”) техники за двунивови йерархични разделяния за елиптични задачи. Тези техники са представени за първи път в [23] и [24], а по-късно са доразвити в [43].

В Раздел 2.4 обобщаваме йерархичното DA разделяне за случая на многонивово преобуславяне на параболични задачи. При неконформните крайни елементи на Крозе-Равиар степените на свобода се асоциират със средите на страните на крайните елементи. По построение, крайно-елементните пространства, съответстващи на последователност от вложени триангулации \mathcal{T}_ℓ , $1 \leq k \leq \ell$, получени чрез равномерно съгъстяване, не са вложени. Йерархичните трансформационни матрици $J_{DA}^{(k)}$ дефинираме на макроеlementно ниво, като макроеlementът се дефинира като съвкупността от триъгълните крайни елементи, получени при равномерно рафиниране на елемент от грубата мрежа, вж. Фигура 1.



Фигура 1: Макроелемент E , крайни елементи на Крозе-Равиар

Нека с $\{M_E^{(k)}\}_{E \in \mathcal{T}_k}$ и $\{K_E^{(k)}\}_{E \in \mathcal{T}_k}$ означим макроелементните матрици на маса и коравина, съответстващи на дискретизация на задачата върху мрежата \mathcal{T}_k на ниво на сгъстяване k , а глобалните матрици се асемблират като

$$M^{(k)} = \sum_{E \in \mathcal{T}_k} M_E^{(k)}, \quad K^{(k)} = \sum_{E \in \mathcal{T}_k} K_E^{(k)}, \quad A^{(k)} = M^{(k)} + \Delta t(1 - \theta)K^{(k)}.$$

За даден макроелемент $E \in \mathcal{T}_k$ с номерация на възлите от рафинираната мрежа от 1 до 9, както е показано на Фигура 1, локалната трансформационна матрица $J_{DA;E}^{(k)}$ за DA метода се дефинира като:

$$J_{DA;E}^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & -1 & & & & \\ & & & & & 1 & -1 & & \\ 1 & & & & & & & 1 & -1 \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & & & & & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Йерархичната матрица на масата има вида

$$\widehat{M}^{(k)} = J_{DA}^{(k)} M^{(k)} (J_{DA}^{(k)})^T = \sum_{E \in \mathcal{T}_k} J_{DA;E}^{(k)} M_E^{(k)} (J_{DA;E}^{(k)})^T = \begin{bmatrix} \widehat{M}_{11}^{(k)} & \widehat{M}_{12}^{(k)} \\ \widehat{M}_{21}^{(k)} & \widehat{M}_{22}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

където $\widehat{M}_{22}^{(k)}$ се асоциира с неизвестните от по-грубата мрежа. С помощта на Лема 1.3.3 и Лема 1.3.4, в дисертацията показваме следната оценка за константата в усиленото неравенство на КБШ за DA разделяне за глобалната матрица на масата

$$\gamma_M^2 \leq \frac{1}{2}. \quad (22)$$

В [23] е показана оценката $\gamma_K^2 \leq \frac{3}{4}$ за константата в усиленото неравенство на КБШ за DA разделяне за глобалната матрица на коравина. С помощта

на тези оценки получаваме следните резултати за двунивовото DA разделяне за матрицата на дискретната параболична задача,

$$\widehat{A}^{(k)} = J_{DA}^{(k)} A^{(k)} (J_{DA}^{(k)})^T = \begin{bmatrix} \widehat{A}_{11}^{(k)} & \widehat{A}_{12}^{(k)} \\ \widehat{A}_{21}^{(k)} & \widehat{A}_{22}^{(k)} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Теорема 2.4.1. *При прилагане на DA трансформация, за разделянето (23) са в сила неравенствата:*

$$\frac{1}{4}(M^{(k-1)} + \Delta t(1 - \theta) 4K^{(k-1)}) \leq \widehat{S}_A^{(k)} \leq (M^{(k-1)} + \Delta t(1 - \theta) 4K^{(k-1)}),$$

където $\widehat{S}_A^{(k)} = \widehat{A}_{22}^{(k)} - \widehat{A}_{21}^{(k)} \widehat{A}_{11}^{(k)-1} \widehat{A}_{12}^{(k)}$ е допълнение на Шур на йерархичната матрица $\widehat{A}^{(k)}$. Този резултат е равномерен по отношение на скокове на коефициенти и мрежова и коефициентна анизотропия.

Следствие 2.4.1. *Следното спектрално отношение е в сила, равномерно относно скокове на коефициенти, мрежова и коефициентна анизотропия:*

$$\frac{1}{2}A^{(k-1)} \leq \widehat{S}_A^{(k)} \leq 4A^{(k-1)}.$$

Представеният анализ показва два възможни начина за конструиране на АМЛІ преобусловител. При първия подход текущото допълнение на Шур $\widehat{S}_A^{(k)}$ се апроксимира чрез модифицираната матрица $\overline{A}^{(k-1)} = M^{(k-1)} + 4^{\ell-k+1} \Delta t(1-\theta)K^{(k-1)}$. В този случай, при използване на полиномиална стабилизация, линейният АМЛІ преобусловител $C^{(k)}$, вж. (11), се дефинира посредством стабилизиращ полином във вида

$$Z^{(k-1)} = \overline{A}^{(k-1)} \left(I - P_{\beta_k}^k (C^{(k-1)-1} \overline{A}^{(k-1)}) \right)^{-1}.$$

При втория възможен подход директно се използва матрицата на системата $A^{(k-1)}$ и допълнението на Шур се приближава чрез

$$Z^{(k-1)} = A^{(k-1)} \left(I - P_{\beta_k}^k (C^{(k-1)-1} A^{(k-1)}) \right)^{-1}.$$

Раздел 2.5 е посветен на обобщение и сравнение на робастни преобусловители за параболични задачи, дискретизирани с помощта на конформни и неконформни крайни елементи. Разглежданите АМЛІ методи се характеризират от константата в усиленото неравенство на КБШ за избраното йерархично разделяне. За целите на сравнението разглеждаме системна матрица в следния (скалиран) вид

$$A = \zeta M + K = \sum_{E \in \mathcal{T}} A_E = \sum_{E \in \mathcal{T}} (\zeta M_E + K_E) \quad (24)$$

където $\zeta > 0$ е параметър, съответстващ на избора на параметрите Δt и θ при дискретизацията по времето.

(i) *Неконформни крайни елементи на Крозе-Равиар, DA разделяне:*

За локалните (макроелементни) константи на КБШ за йерархичните матрица на коравина $\widehat{K}_E = J_{DA;E} K_E (J_{DA;E})^T$ и матрица на маса $\widehat{M}_E = J_{DA;E} M_E (J_{DA;E})^T$ в случая на неконформни дискретизации с крайни елементи на Крозе-Равиар са в сила оценките

$$\gamma_{K;E}^2 \leq \frac{3}{4}, \quad \gamma_{M;E}^2 = \frac{1}{2}.$$

Показваме, че при разглежданата йерархична трансформация, е в сила $\gamma_{A;E} \leq \max\{\gamma_{M;E}, \gamma_{K;E}\}$, където $\widehat{A}_E = J_{DA;E} A_E (J_{DA;E})^T = \zeta \widehat{M}_E + \widehat{K}_E$ е локалната макроелементна матрица. Тогава, с помощта на Лема 1.3.4, получаваме равномерната относно мрежова и коефициентна анизотропия оценка

$$\gamma_A^2 \leq \frac{3}{4} \tag{25}$$

за константата в усиленото неравенство на КБШ за DA разделяне на матрицата (24) при дискретизация с неконформни крайни елементи.

(ii) *Неконформни крайни елементи на Крозе-Равиар, FR разделяне:*

В този случай са в сила следните равномерни оценки за локалните константи на КБШ за макроелементните матрици на маса и на коравина,

$$\gamma_{M;E}^2 = 0, \quad \gamma_{K;E}^2 < \frac{3}{4}.$$

(iii) *Конформни крайни елементи на Курант:*

Следните оценки са в сила за локалните константи на КБШ за случая на двунивово разделяне на матриците на коравина и маса при дискретизация с линейни конформни крайни елементи, вж. напр. [49].

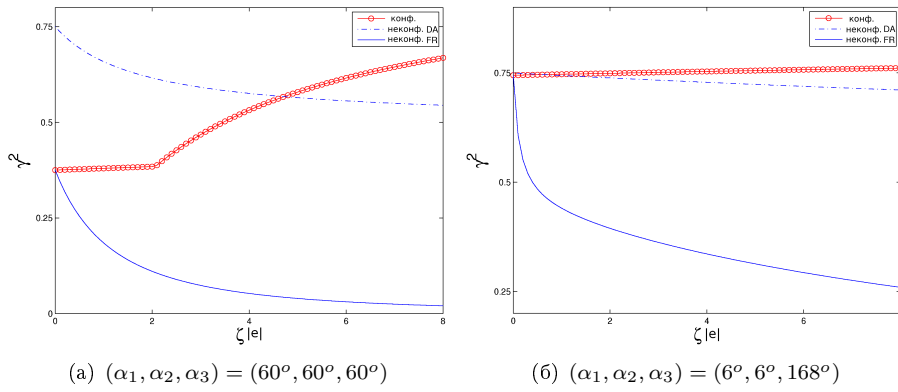
$$\gamma_{K;E}^2 \leq \frac{3}{4}, \quad \gamma_{M;E}^2 = \frac{9}{10}.$$

В сила е оценката $\gamma_A^2 \leq \gamma_{A;E}^2 \leq \max\{\gamma_{K;E}^2, \gamma_{M;E}^2\}$, от където

$$\gamma_A^2 \leq \frac{9}{10}. \tag{26}$$

Оценката е равномерна относно мрежова и коефициентна анизотропия.

Достатъчното условие за оптималност на АМЛІ метода (14) не е изпълнено, ако $\gamma^2 > \frac{8}{9}$. Както се вижда от оценката (26), при двунивово



Фигура 2: Константата на КБШ за $A_E = \zeta M_E + K_E$ като функция на произведението на параметъра ζ и лицето на крайния елемент $|e|$

разделяне в случая на конформни крайни елементи, това може да се случи за определени стойности на коефициента ζ в (24), който в общия случай е пропорционален на $\frac{1}{\Delta t}$.

В случая на DA разделяне, условието за оптималност (14) е удовлетворено за степен на стабилизиращия полином $\beta = 3$. Числените експерименти, включени в Раздел 2.6, показват, че стабилизиация може да се постигне и за $\beta = 2$, както при DA, така и при FR разделяне. Едно възможно обяснение за тези резултати е, че реалната стойност на γ_A за съставната матрица е по-малка, т.е. оценката (25) не се достига.

Фигура 2 представя числено изследване на поведението на константата в усиленото неравенство на КБШ за матрицата $A_E = \zeta M_E + K_E$ като функция на произведението на параметъра ζ и лицето на крайния елемент $|e|$ от една страна, и мрежовата анизотропия от друга страна. Означаваме с $\gamma_{DA;E}^{CR}$, $\gamma_{FR;E}^{CR}$ и γ_E^C макроелементните константи на КБШ, съответстващи на разделянията в случаите (i), (ii) и (iii).

Нека припомним, че мрежовата анизотропия се описва посредством ъглите $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ на триъгълните крайни елементи. В дисертацията са разглеждани няколко случая на избор на тези ъгли, а на Фигура 2 са изобразени графиките на $\gamma^2 = \{(\gamma_E^C)^2, (\gamma_{DA;E}^{CR})^2, (\gamma_{FR;E}^{CR})^2\}$ като функции на $\zeta|e|$ за два избора на $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Константата $\gamma_{FR;E}^{CR}$ в усиленото неравенство на КБШ за FR разделяне е най-малката във всички разглеждани в дисертацията случаи. При сравнение на γ_E^C и $\gamma_{DA;E}^{CR}$ се вижда, че константата на КБШ за конформни елементи има по-добро поведение за малки стойности на параметъра $\zeta|e|$

и случаи на по-малка мрежова анизотропия. Общо наблюдение е, че предимствата на неконформните крайни елементи са добре изразени в случая на най-силна мрежова анизотропия.

В Раздел 2.6 дефинираме две задачи, чрез които числено изследваме поведението на предложените многонивови преобусловители за параболични задачи. Първата задача цели да илюстрира въздействието на мрежовата анизотропия върху сходимостта на итерационните методи за решаване на разглежданите системи, а втората демонстрира поведението на многонивовите методи при решаване на нестационарна задача с прекъснато начално условие.

В числените експерименти разглеждаме AMLI преобусловител без стабилизация (V-цикъл) и нелинеен AMLI (NLAMLI) с брой вътрешни итерации с обобщен метод на спрегнатия градиент с преобуславяне $\beta_k = 2$ и 3 на всяко ниво k (W-цикъл от степен 2 и 3). Използваме нелинейния AMLI метод поради следните съображения. От една страна не разполагаме с оценка на константата в усиленото неравенство на КБШ за случая на FR разделяне на матрицата на системата за параболична задача. Известно е обаче (вж. напр. [43]), че за елиптични задачи FR подходът притежава по-добра сходимост от DA метода, което ни дава основание да очакваме подобно поведение и за случая на параболични задачи. Също така, трябва да се вземе под внимание, че FR преобусловителите подобряват свойствата си при увеличаване на броя на нивата в AMLI метода. Въз основа на Теорема 2.4.1, DA преобусловителят притежава гарантирана оптимална скорост на сходимост при използване на стабилизиращ полином от трета степен, но в проведените експерименти разглеждаме също така и стабилизация само с две вътрешни итерации. Ето защо, използването на саморегулираща се нелинеен AMLI метод с адаптивно преобуславяне по нива, който да позволи усвояването на пълния потенциал на йерархичното разделяне, е за предпочитане. Системите с водещите диагонални блокове се решават приближено чрез вътрешни итерации на метода на спрегнатия градиент с адитивен преобусловител, представен в Раздел 2.3.

Мрежовата анизотропия, породена от формата на триъгълните елементи, води до допълнителна лоша обусловеност на матрицата на коравина, което влияе върху сходимостта на V-цикъла за системи с K . В съответствие с теоретичните оценки, при използване на стабилизация в двата варианта на W-цикъл, броят на итерациите не се влияе съществено от “лошата” мрежа. Матрицата на масата за крайни елементи на Крозе-Равиар е диагонална, поради което матрицата на системата за дискретизираната параболична задача е по-силно диагонално доминираща от матрицата на системата в случай на елиптична задача. Сравнение на резултатите ясно показва влиянието на този ефект. W-цикълите за параболичната система се стабилизират за по-малък брой итерации. V-цикълът за този случай също

има по-добри свойства. Сравнението на DA и FR преобусловителите показва, че FR методът има същата или по-добра скорост на сходимост спрямо тази на DA метода за параболичната задача. Случаят на W-цикъл с три вътрешни итерации, както и този с две, показват оптимално поведение и за двата разглеждани варианта на йерархично разделяне. Резултатите потвърждават предположението, че FR преобусловителят е оптимален и за параболичната задача.

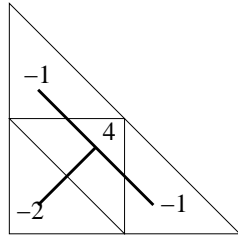
Резултатите, получени при решаване на нестационарна задача с прекъснато начално условие, съответстват на свойствата на физичното явление. Ясно се наблюдава типичното за еволюционни уравнения изглаждане на началното условие.

Глава 3. Многонивови методи за граф-лапласиани с тегла

В Раздел 3.1 е представена постановка на елиптична задача в смесена форма за векторната функция на скоростта и скаларната функция на налягането. Смесеният метод на крайните елементи води до задача със седлова точка. Матрицата на дискретната система от линейни алгебрични уравнения е особена и директното приложение на метод на спрегнатия градиент не е възможно. Разглеждаме дискретизация с комбинация от неконформни крайни елементи на Крозе-Равиар и на части константи. В този случай неизвестните на скоростите могат да бъдат изключени точно и задачата се свежда до задача за решаване на система за налягането.

Видът на матрицата на системата за налягането е изведен в Раздел 3.2, като тя има структура на граф-лапласиан с тегла. В следващите раздели разглеждаме случая на вложени мрежи $T_k, k = 0, \dots, \ell$ от равнобедрени правоъгълни триъгълници, като всяка по-фина мрежа е получена чрез равномерно съгъстяване на предходната. За всяка такава триангулация, матрицата на системата $A^{(k)}, k = 1, \dots, \ell$ съответства на T-образния четириточков шаблон от Фигура 3.

В Раздел 3.3 предлагаме семейство йерархични разделяния за матрицата $A^{(k)}$, основани на представянето ѝ като сума от специално въведени локални макроелементни матрици $A_\varepsilon^{(k)}, \varepsilon \in \mathcal{E}$, асоциирани със страни на елементи от грубата мрежа. Следвайки номерацията от Фигура 4, въвеждаме локална макроелементна матрица $A_\varepsilon^{(k)}$, съответстваща на хипотенуза, по



Фигура 3: Четириточков шаблон на допълнението на Шур за налягането

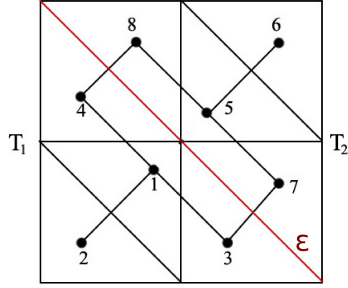
следния начин

$$A_\varepsilon^{(k)} = A_{\varepsilon;H}^{(k)} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} t+1 & -2t & \frac{t-1}{2} & \frac{t-1}{2} & & & & \\ -2t & 2t & & & & & & \\ \frac{t-1}{2} & & \frac{5-t}{2} & & & & -2 & \\ \frac{t-1}{2} & & & \frac{5-t}{2} & & & -2 & \\ \hline & & & & t+1 & -2t & \frac{t-1}{2} & \frac{t-1}{2} \\ & & & & -2t & 2t & & \\ & & -2 & & \frac{t-1}{2} & & \frac{5-t}{2} & \\ & & & -2 & \frac{t-1}{2} & & & \frac{5-t}{2} \end{array} \right]. \quad (27)$$

Локалните матрици, съответстващи на катет, дефинираме по подобен начин. Основна идея в тази конструкция е компонентите на глобалната матрица $A^{(k)}$, съответстващи на даден елемент $e \in \mathcal{T}_k$, да бъдат "разпределени" между три локални матрици, съответстващи на трите страни на елемента $E \in \mathcal{T}_{k-1}$ от грубата мрежа, за който $e \subset E$. Това разпределение става посредством теловия параметър $t \in (0, 1)$. Дефинираме локалната трансформационна матрица $J_\varepsilon^{(k)}$ по следния начин

$$J_\varepsilon^{(k)} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & s & q & q & & & & \\ 1 & q & s & q & & & & \\ 1 & q & q & s & & & & \\ & & & & 1 & s & q & q \\ & & & & 1 & q & s & q \\ & & & & 1 & q & q & s \\ r & r & r & r & & & & \\ & & & & r & r & r & r \end{array} \right], \quad (28)$$

където s и q са параметри на разделянето, а r е скалиращ параметър.



Фигура 4: Макроелемент от два триъгълника с обща хипотенуза

Глобалната йерархична матрица приема блочното две-на-две разделяне

$$\tilde{A}^{(k)} = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} J_{\varepsilon}^{(k)} A_{\varepsilon}^{(k)} J_{\varepsilon}^{(k)T} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11}^{(k)} & \tilde{A}_{12}^{(k)} \\ \tilde{A}_{21}^{(k)} & \tilde{A}_{22}^{(k)} \end{bmatrix}.$$

Лема 3.3.1. *За йерархичния базис, дефиниран чрез трансформацията (28), е изпълнено равенството*

$$\tilde{A}_{22}^{(k)} = A^{(k-1)} \quad \text{тогава и само тогава, когато} \quad r = \sqrt{2}/2.$$

Лема 3.3.1 показва, че във втория диагонален блок на предложеното йерархичното разделяне се възстановява граф-лапласианът на грубата мрежа, което позволява рекурсивно многонивово обобщение за последователност от вложени триангулации.

Варирайки параметрите (s, q, t) получаваме семейство йерархични разделяния. По аналогия с анализа в [47], първо разглеждаме комбинацията $s = 1, q = -0.5, t = 0.5$. Като използваме Лема 1.3.4 в този случай получаваме оценката

$$\gamma^2 \leq 0.73 \quad (29)$$

за константата в усиленото неравенство на КВШ.

Като следваща стъпка модифицираме параметрите на йерархичната трансформация с цел подобряване на оценката за локалните константи в усиленото неравенство на КВШ. Варираме стойностите на q и t за $s = 1$. Направеният анализ показва, че за $q = -0.1$ и $t = 0.75$ се достига локален минимум и

$$\gamma^2 \leq 0.58. \quad (30)$$

И в двата разгледани случая на избор на параметрите на разделянето (s, q) , достатъчното условие за оптималност (14) на AMLI метода е изпълнено за стабилизация с полином от втора степен.

В Раздел 3.4 е предложен и изследван преобусловител за водещия диагонален блок в дефинираното йерархично разделяне на граф-лапласиани. Конструкцията използва полиномиална апроксимация на обратна матрица, като запазва линейността в метода на спрегнатия градиент с преобуславяне.

Нека разгледаме симетричната положително определена матрица H с размерност $n \times n$. Множеството от двойките λ и собствено число - собствен вектор означаваме с $\{\lambda_i, \widehat{\mathbf{v}}_i\}_{i=1}^n$, $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$. Целта е да построим полиномиална апроксимация (преобусловител) C^{-1} на H^{-1} (т.е. преобусловител C на H), така че $C^{-1} = P_\nu(H)$, където $P_\nu \in \mathcal{P}_\nu$ е полином от степен ν , а относителното число на обусловеност $\kappa(C^{-1}H)$ да е близо до единица.

Теорема 3.4.1. *Нека $P_\nu(x) \in \mathcal{P}_\nu$ и неравенствата $0 < \underline{m} \leq P_\nu(x)x \leq \overline{m}$ са в сила за всяко x в даден интервал \mathcal{S} , за който $[\lambda_1, \lambda_n] \subset \mathcal{S}$. Тогава*

$$\underline{m}\mathbf{v}^T \mathbf{v} \leq \mathbf{v}^T P_\nu(H)H\mathbf{v} \leq \overline{m}\mathbf{v}^T \mathbf{v}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Целта е да получим матрица, която е близка до обратната на H , $P_\nu(H)H \sim I$, т.е. $P_\nu(x)x \sim 1$ за всяко $x \in \mathcal{S}$. Нека предположим, че $|P_\nu(x) - 1/x| < \epsilon$ за всяко $x \in \mathcal{S} = [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$, където $\lambda_{\min} \leq \lambda_i \leq \lambda_{\max}$, $i = 1, \dots, n$. Тогава

$$1 - \epsilon\lambda_{\max} < P_\nu(x)x < 1 + \epsilon\lambda_{\max}. \quad (31)$$

В общия случай, ако ϵ е достатъчно малко, или еквивалентно, ако степента ν на полинома е достатъчно голяма, то $P_\nu(x)x > 0$ за всяко $x \in \mathcal{S}$, $P_\nu(H)H$ е симетрична и положително определена и

$$\kappa(P_\nu(H)H) < \frac{1 + \epsilon\lambda_{\max}}{1 - \epsilon\lambda_{\max}}.$$

Подходът, който разглеждаме в дисертацията, е да изберем $P_\nu(x)$ да бъде полинома на най-добро приближение на x^{-1} в L_∞ норма в крайния интервал $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$, т.е.

$$\left\| \frac{1}{x} - P_\nu \right\|_{\infty, [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]} = \min_{P \in \mathcal{P}_\nu} \left\| \frac{1}{x} - P \right\|_{\infty, [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]} = E(\nu).$$

Грешката на най-доброто полиномиално приближение $E(\nu)$ е

$$E(\nu) = \frac{8\sigma\theta^{-\nu}}{(\theta - \theta^{-1})^2}, \quad \sigma = \frac{1}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}, \quad a = \frac{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}, \quad \theta = a + \sqrt{a^2 - 1},$$

а за полинома $P_\nu(x)$ съществува тричленна рекурентна формула (вж. [44]), която използваме за пресмятането на $P_\nu(H)$.

Водещият диагонален блок $\tilde{A}_{11}^{(k)} = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} \tilde{A}_{\varepsilon:11}^{(k)}$ е симетрична и положително определена матрица и описаната по-горе техника за полиномиална апроксимация на обратната ѝ матрица е директно приложима. Минималната и максимална собствени стойности не зависят от размерността на задачата, ето защо е достатъчно да намерим оценки λ_{\min} и λ_{\max} за собствените стойности на водещия диагонален блок за сравнително груба мрежа и да използваме един и същ интервал \mathcal{S} , а от там и един и същ полином $P_\nu(x)$, за всяко $k = 1, \dots, \ell$.

Нека изберем $C_{11}^{(k)} = (1 + E(\nu)\lambda_{\max})(P_\nu(\tilde{A}_{11}^{(k)}))^{-1}$ за преобусловител на водещия диагонален блок $\tilde{A}_{11}^{(k)}$. Тогава, от неравенствата (31) и Теорема 3.4.1 следва, че за константата ξ в (15) е изпълнено равенството

$$\xi = (1 + E(\nu)\lambda_{\max}) / (1 - E(\nu)\lambda_{\max}) - 1. \quad (32)$$

В Раздел 3.5 е проведен системен числен анализ на предложените техники за многонивно преобуславяне на граф-лапласиани с тегла. Последователно са изследвани свойствата на йерархичното разделяне и полиномиалната апроксимация на водещите диагонални блокове.

Конструираният АМЛІ преобусловител е рекурсивно обобщение на двунивов метод за двунивово разделяне, което има еднакви свойства на всяко ниво. Ето защо в Раздел 3.5.1 най-напред разглеждаме поведението на двунивов мултипликативен преобусловител. Разглеждаме два случая на стойности на параметрите на йерархичното разделяне, ($s = 1, q = -0.5$) и ($s = 1, q = -0.1$). И за двете параметрични комбинации броят на итерациите в метода на спрегнатия градиент с преобуславяне не зависи от размерността на задачата, а само от желаната относителна грешка ϵ , като зависимостта е в съответствие с Теорема 1.2.2.

Като следваща стъпка разглеждаме АМЛІ преобусловител със стабилизиращ полином от втора степен. За случая $\beta = 2$, коефициентите на полинома можем да пресметнем чрез формулите (16), в които участват оценка γ_{est} на константата γ в усиленото неравенство на КБШ, $\gamma \leq \gamma_{est}$, и константата ξ от неравенствата (15). Разглеждаме АМЛІ метод, при който системите с водещите диагонални блокове се решават точно, и такъв, при който водещите блокове са преобусловени чрез техни скалирани диагонални части. И в двата случая се наблюдава стабилизация на броя итерации по отношение на размерността на задачата. Относителното число на обусловеност на АМЛІ преобусловителя се увеличава, когато системите с водещия диагонален блок не се решават точно, което води до повече итерации в метода на спрегнатия градиент.

Анализът на числените експерименти дават основание да се предположи, че бихме могли да подобрим метода за случая ($p = 1, q = -0.5$), като използваме информация от направените тестове. Поведението на двунивовия преобусловител е добър практически индикатор за свойствата на

дефинираното йерархично разделяне, а числените тестове показват, че методът на спрегнатия градиент с преобуславяне се държи по много подобен начин за двата случая на параметри на разделянето. Това предполага, че и съответните разделяния имат близки свойства. Качествата на стабилизиращия полином се влияят от точността на оценката γ_{est}^2 , с която се пресмятат коефициентите (16) и има основание да се допусне, че изведената оценка $\gamma_{est}^2 = 0.73$ е песимистична за случая ($p = 1, q = -0.5$) и вместо нея можем да използваме получената за случая ($p = 1, q = -0.1$), т.е. $\gamma_{est}^2 = 0.58$. Методът на спрегнатия градиент с многонивов преобусловител с коефициенти на стабилизиращия полином, които пресмятаме като използваме тази по-добра оценка, се схожда и АМЛІ методът се стабилизира за по-малко итерации, като броят им съответства на оценката в Теорема 1.2.2.

Числените експерименти, представени в Раздел 3.5.2, имат за цел да илюстрират свойствата на предложения полиномиален преобусловител за водещите диагонални блокове в йерархичното разделяне за граф-лапласиани. Разглеждаме случая $s = 1, q = -0.1, \gamma_{est}^2 = 0.58$. Предложената в тази глава конструкция за разглежданите системи гарантира, че матриците $C_{11}^{(k)}$ са симетрични положително определени при степени на полинома $\nu \geq 2$. Сходимостта при $\nu = 3$ и $\nu = 4$ е доста по-добра от тази за $\nu = 2$ и методът се стабилизира по-рано. Това е очакван резултат, тъй като $E(\nu)$ и съответната стойност за ξ са значително по-големи при $\nu = 2$. Важно е да отбележим, че ξ е мярка за това колко добре $C_{11}^{(k)}$ приближава $\tilde{A}_{11}^{(k)}$ и също така влияе в значителна степен на стабилизиращите свойства на полинома $Q_{\beta-1}$. Преобуславител с диагонална апроксимация на $\tilde{A}_{11}^{(k)}$, за който $\xi = 6.2$, води до по-малък брой итерации от преобусловител с полиномиална апроксимация от степен $\nu = 2$, където $\xi = 9.166$. От друга страна, когато блокът $\tilde{A}_{11}^{(k)}$ е преобусловен с матричен полином от степен $\nu = 3$ или $\nu = 4$, ξ е значително по-малко, съответно и итерациите намаляват, като броят им не е много по-голям от този за случая на точно решаване на системите с водещия диагонален блок.

Полиномът P_ν в апроксимацията за водещите диагонални блокове в предложението АМЛІ преобусловител е постоянен, като по този начин се осигурява линейността на процеса и ортогоналността на направленията на търсене в метода на спрегнатия градиент с преобуславяне се запазва. Правим също така сравнение с многонивов преобусловител, при който вместо полиномиалната апроксимация за намиране на приближено решение на системите с водещите диагонални блокове, използваме няколко вътрешни итерации с метода на спрегнатия градиент. Подобни експерименти имат няколко специфични особености. Методът на спрегнатия градиент се адаптира автоматично, за да намери най-доброто приближено решение за дадена дясна част, но това означава, че действието на матричния полином, който съответства на определен брой вътрешни итерации, се променя на

всяка външна итерация на метода на спрегнатия градиент с преобуславяне. По този начин линейността на АМЛИ метода се разваля. В такъв случай вместо метод на спрегнатия градиент с преобуславяне се налага да се използва обобщен метод на спрегнатия градиент с преобуславяне, при който допълнително наложената ортогоналност се постига на цената на повече използвани компютърни ресурси. Анализът на проведените експерименти със стандартен метод на спрегнатия градиент с преобусловители с описаната по-горе конструкция с вътрешни итерации чрез метода на спрегнатия градиент не водят до добри резултати, не се наблюдава стабилизация, а в някои случаи процесът не се сходя.

Глава 4. Многолинови методи за уравненията на Навие-Стокс

Глава 4 е посветена на конструиране на ефективни алгоритми за намиране на числено решение на нестационарната система от уравнения на Навие-Стокс, описващи течение на несвиваем флуид. Резултатите, представени тук, демонстрират приложение на предложените в Глава 2 и Глава 3 многолинови методи в една от важните приложни области на изчислителната математика и механика, а именно, численото изследване на динамика на флуидите.

В дисертацията разглеждаме техника за числено решаване на нестационарната система от уравнения на Навие-Стокс, която използва така наречения проекционен подход, при който вместо свързана система, на всяка стъпка по времето се разглеждат отделни задачи за скоростите и налягането. Проекционните методи за първи път са предложени от Temam и Chorin, вж [53] и [30]. Подходът се основава на представянето на L^2 - векторни полета като директна сума на бездивергентни полета и полета с нулева ротация (вж. напр. [36]).

В дисертацията за апроксимация на неизвестните на скоростите \mathbf{u} използваме неконформни линейни крайни елементи на Крозе-Равиар. Едно важно предимството на тези елементи е, че дивергенцията на полето на скоростите е нула във вътрешността на всеки елемент. Неизвестното налягане p търсим в пространството от на части константни функции. Този избор води до устойчива, локално консервативна дискретизация, вж. напр. [31] и [21].

Проекционната схема, представена в Раздел 4.1, разделя нелинейната система на Навие-Стокс на две линейни подзадачи. В Раздел 4.2 разглеждаме подробно структурата на системите, възникващи на конвективно-дифузионната и проекционната стъпки в проекционния метод. Предлагаме съставен многолинов метод, при който за всяка от тях се прилага оптимално многолиново преобуславяне, което води до обща оптимална ефективност

на метода.

Конвективно-дифузионна стъпка:

На конвективно-дифузионната стъпка в проекционния метод трябва да се решат две независими задачи от параболичен тип за компонентите на скоростта. Структурата на матриците на системите на двете задачи е една и съща (с точност до допълнително наложени гранични условия) и има следния вид

$$A = \frac{1}{\Delta t} M + \frac{1}{Re} K.$$

В дисертацията предлагаме за решаването на тези системи да се използват представените в Глава 2 робастни AMLI преобусловители за параболични задачи, дискретизирани с крайни елементи на Крозе-Равиар. Напомняме, че в този случай оценката за константата в усиленото неравенство на КБШ за DA разделяне е равномерно ограничена и не зависи от нивото на съгъстяване на мрежата, т.е. не зависи от мрежовия параметър, или мрежовата анизотропия на първоначалната мрежа.

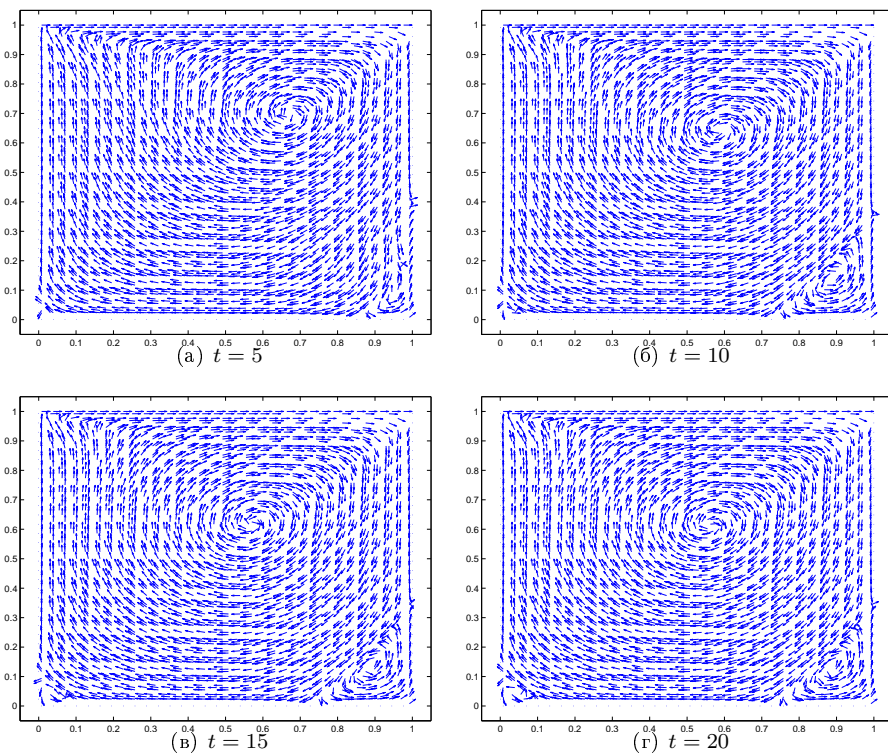
Експериментите в Раздел 2.6 (вж. още [25]) показват, че FR методът за параболични задачи има по-добра сходимост от тази при използване на DA преобусловител. Оптималност на AMLI метода за DA преобуславяне се гарантира теоретично при стабилизация с полином от степен $\beta = 3$, но в дисертацията показваме, че на практика оптимален (или почти оптимален) ред на сходимост се наблюдават и за N\AML I метод с $\beta = 2$, както за DA, така и за FR преобуславяне.

Проекционна стъпка:

На проекционната стъпка трябва да се реши система със седлова точка, получена чрез дискретизация на смесена задача като тази, разгледана в Глава 3. Матрицата на масата за крайни елементи на Крозе-Равиар е диагонална и изключването на неизвестните на скоростите може да се извърши точно, като по този начин локалната консервативност на дискретизацията се запазва. Редуцираната задача за неизвестните на налягането има симетрична и положително полуопределена матрица със структура на граф-лапласиан с тегла. В съставния алгоритъм за уравненията на Навие-Стокс използваме преобусловителя за системи от този вид, описан в Глава 3. Изведената там оценка за константата в усиленото неравенство на КБШ за предложеното йерархично разделяне на граф-лапласиан с тегла е в сила за равномерна мрежа от правоъгълни триъгълници.

Числен анализ на свойствата на предложения съставен алгоритъм е представен в Раздел 4.3. Разглеждаме задачата за течение, предизвикано от движение на безкраен капак по повърхността на контейнер пълен с флуид. В литература на английски език в областта на динамика на флуидите, тази задача е известна като lid-driven cavity flow. В дисертацията разглеждаме три случая на число на Рейнолдс, $Re = 100$, $Re = 400$ и $Re = 1000$.

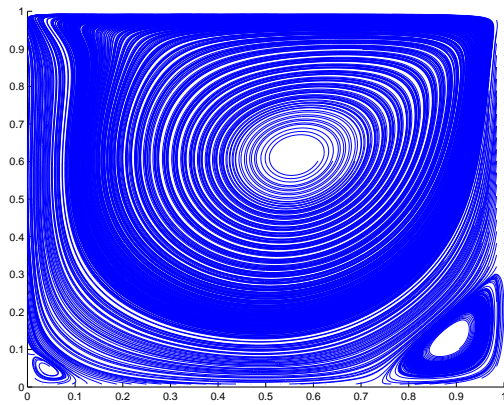
Фигура 5: Векторно поле на скоростите при число на Рейнолдс $Re = 400$



Целта на проведените експерименти е да се анализира сходността на многонивовите методи, приложени при решаване на системите за двете компоненти на скоростта и системата за налягането в рамките на съставния алгоритъм. При решаването на параболичните задачи използваме NLAMLI алгоритъм със стабилизация с $\beta = 2$ вътрешни итерации и FR преобусловител. В този случай за приближено решаване на системите с водещите диагонални блокове използваме три вътрешни итерации с метод на спрегнатия градиент с описания в Раздел 2.3 преобусловител. За задачата за налягането прилагаме метод на спрегнатия градиент с многонивов преобусловител за граф-лапласиани, основан на разделянето, предложено в Раздел 3.3, и стабилизация с полином от втора степен. Полиномът P_ν , с който апроксимираме обратните матрици на водещите диагонални блокове в йерархичното разделяне на тази стъпка, е от трета степен.

В съответствие с теоретичните оценки, при решаването на параболичните задачи прилагането на $\beta = 2$ вътрешни итерации в NLAMLI ал-

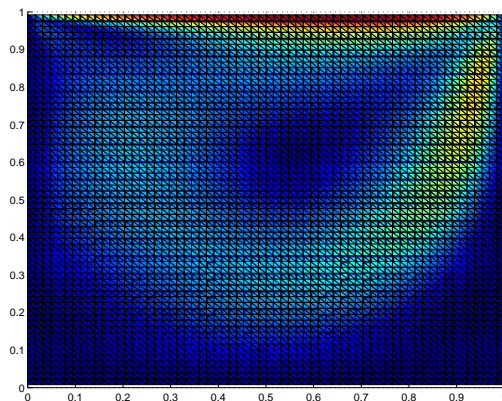
Фигура 6: Поле на вихъра, $Re = 400, t = 20$



Бр. рафинирания ℓ	$IT(\hat{\mathbf{u}}_1)$	$IT(\hat{\mathbf{u}}_2)$	$IT(\mathbf{p})$
	Ср. бр. итерации, отн. грешка 10^{-9}		
1	4	3.96	16.52
2	5	4.95	17.97
3	7	6.93	18.07
4	8.96	7.92	18.25

Таблица 1: Поведение на съставния многонивов метод, $Re = 400$

Фигура 7: Норма на векторите от полето на скоростите, $Re = 400, t = 20$



Бр. рафинирания ℓ	$IT(\hat{\mathbf{u}}_1)$	$IT(\hat{\mathbf{u}}_2)$	$IT(\mathbf{p})$
Ср. бр. итерации, отн. грешка 10^{-9}			
1	3	2.97	16.52
2	4	3.96	17.93
3	5.97	4.95	18.02
4	7.07	6.93	18.26

Таблица 2: Поведение на съставния многонивов метод, $Re = 1000$

горитъма не осигурява пълна стабилизация на общия брой итерации, вж. колони $IT(\hat{\mathbf{u}}_1)$ и $IT(\hat{\mathbf{u}}_2)$ в Таблице 1-2. Въпреки това, разликата в сходимостта за различни размерности на задачата е незначителна, като броя на итерациите се увеличава с не повече от две за последователни нива на рафиниране. Ето защо използването на $\beta = 2$ в NLAMLI метода, вместо изчислително по-скъпия случай $\beta = 3$, е оправдано. Броят итерации при решаване на параболичните задачи е по-малък при по-големи числа на Рейнолдс. Обяснение на този факт е по-силната диагонална доминация на съответните матрици. Средният брой итерации $IT(\mathbf{p})$, необходими за постигане на желаната точност при решаването на системата на проекционната стъпка в съставния алгоритъм, са повече от итерациите на конвективно-дифузионната стъпка. Трябва да отбележим, обаче, че размерността на системите за налягането е по-малка от размерността на системите за скоростите. Броят на итерациите при решаването на задачата за налягането, както и наблюдаваната в този случай стабилизация, съответстват на теоретичните и числени резултати в Глава 3.

Получените резултати за приближеното решение на уравненията на Навие-Стокс в случая на $Re = 400$ са илюстрирани чрез Фигури 5 – 7. На Фигура 5 е показано скалираното векторно поле за различни стъпки по времето, с цел да се демонстрира изменението на профила на течението. При $t = 5$ се наблюдава завихряне в левия долен ъгъл на контейнера. При $t = 10$ в десния долен ъгъл се оформя още един вихър, който се доразвива при $t = 15$ и $t = 20$. На Фигура 6 е представена друга визуализация на течението при $t = 20$, този път чрез полето на вихъра. Стойностите на нормата на векторите от полето на скоростите на последната стъпка по времето са показани на Фигура 7. Както се вижда, скоростта е най-голяма близо до капака.

Авторска справка

Основните научни приноси на настоящата дисертация са:

1. Изследван е многонивов метод за двумерни линейни параболични

задачи, дискретизирани с неконформни крайни елементи на Крозе-Равиар. Получена е нова равномерна оценка за константата в усиленото неравенство на Коши-Буняковски-Шварц за йерархично разделяне чрез DA метод за матрицата на масата. Направено е обобщение на получения резултат и са предложени два подхода за конструиране на оптимални многонивови преобусловители основани на DA разделяне на матрицата на дискретизираната параболична задача.

2. Получена е характеристика на робастни многонивови методи за параболични задачи, дискретизирани с конформни елементи на Курант и неконформни елементи на Крозе-Равиар. Изследвано е влиянието на мрежовата анизотропия върху качествата на съответните йерархични разделяния.
3. Разгледан е подход за решаване на системи, получени при дискретизация с неконформни крайни елементи на елиптични задачи в смесена форма. Подходът свежда задачата до система с матрица със структура на граф-лапласиан с тегла. Предложено е йерархично разделяне за такъв тип задачи, основано на специално дефинирани макроеlementи, асоциирани със страни на триъгълници от груба мрежа. Получена е равномерна оценка за константата на КБШ в случая на равномерна триангулация с правоъгълни елементи.
4. Разработена е полиномиална апроксимация за симетрични положително определени матрици с помощта на полинома на най-добро приближение на x^{-1} в L_∞ норма в краен интервал. Изведена е оценка за относителното число на обусловеност на така получения преобусловител. Подходът е приложен за апроксимиране на водещите диагонални блокове в многонивова факторизация на граф-лапласиани с тегла. Изследвани са свойствата на получения многонивов метод в случая на равномерна триангулация с правоъгълни елементи.
5. Предложен е оптимален съставен многонивов метод за решаване на нестационарните уравнения на Навие-Стокс за случая на устойчива, локално консервативна дискретизация с неконформни крайни елементи. Методът се основава на многонивово преобуславяне на системите, възникващи на конвективно-дифузионната и проекционна стъпки в проекционен метод.
6. Програмно са реализирани изследваните методи и алгоритми. Проведените числени експерименти потвърждават тяхната изчислителна ефективност за важни класове задачи с голяма размерност.

Благодарности

Поднасям най-сърдечна благодарност на научния си ръководител проф. д-мн Светозар Маргенов за постоянното внимание, съдействието, както и ползотворната съвместна работа по разработваните теми.

Дълбоко съм благодарна на доц. Мая Нейчева, д-р Иван Георгиев, д-р Johannes Kraus, проф. Людмил Зикатанов и проф. Петър Минев за оказаната помощ и полезните дискусии на различни етапи от работата по дисертацията. Също така благодаря и на колегите от ИИКТ-БАН за подкрепата и стимулиращата творческа атмосфера.

Благодарна съм за оказаната подкрепа в рамките на цитираните научни проекти ДО02-115/2008, ДО02-147/2008, ДО02-338/2008 и VU-MI-202/2006 към фонд "Научни изследвания" и Finite element preconditioners for algebraic problems as arising in modelling of multiphase microstructures към Swedish Research Council.

Изказвам специални благодарности на семейството си за постоянната подкрепа. Работата по дисертацията посвещавам на баща си.

Литература

- [1] Б. Боянов, *Лекции по числени методи*, Дарба, 1995.
- [2] Бл. Сендов, В. Попов, *Числени методи I, II*, София, „Наука и изкуство“, 1978.
- [3] Г. Стренг, Дж. Фикс, *Теория метода конечных элементов*, Москва, „Мир“, 1977.
- [4] D. N. Arnold, F. Brezzi, *Mixed and nonconforming finite element methods: implementation, postprocessing and error estimates*, RAIRO, Model. Math. Anal. Numer., **19** (1985), 7–32.
- [5] B. Ayuso de Dios and L. Zikatanov, *Uniformly convergent iterative methods for discontinuous Galerkin discretizations*, SIAM J. Sci. Comput. **40** (2009), 4–36.
- [6] O. Axelsson, *A Generalized Conjugate Gradient, Least Square Method*, Numer. Math. 51 (1987), pp. 209–227.
- [7] O. Axelsson, *Iterative solution methods*, Cambridge, University press, 1994.
- [8] O. Axelsson, *Stabilization of algebraic multilevel iteration methods; additive methods*, Numerical Algorithms **21** (1999), 23–47.

- [9] O. Axelsson, V. Barker, *Finite element solution of boundary value problems: Theory and computations*, Academic Press, 1983.
- [10] O. Axelsson, R. Blaheta, M. Neytcheva, *A black-box generalized conjugate gradient minimum residual method based on variable preconditioners and local element approximations*, TR 2007-033, Institute for Information Technology, Uppsala University, 2007.
- [11] O. Axelsson and I. Gustafsson, *Preconditioning and two-level multigrid methods of arbitrary degree of approximations*, Math. Comp. **40** (1983), 219–242.
- [12] O. Axelsson, S. Margenov, *On multilevel preconditioners which are optimal with respect to both problem and discretization parameters*, Computational Methods in Applied Mathematics, **3(1)** (2003), 6–22.
- [13] O. Axelsson and M. Neytcheva, *Algebraic multilevel iterations for Stieltjes matrices*, Num. Lin. Alg. Appl. **1** (1994), 213–236.
- [14] O. Axelsson, M. Neytcheva, *Preconditioned methods for linear systems arising in constrained optimization problems*, Numer. Linear Algebra Appl. **10** (2003) 3–31.
- [15] O. Axelsson and A. Padiy, *On the additive version of the algebraic multilevel iteration method for anisotropic elliptic problems*, SIAM J. Sci. Comput. **20** (1999), 1807–1830.
- [16] O. Axelsson and P.S. Vassilevski, *Algebraic multilevel preconditioning methods I*, Numer. Math. **56** (1989), 157–177.
- [17] O. Axelsson, P.S. Vassilevski, *Algebraic multilevel preconditioning methods II*, SIAM J. Numer. Anal., **27** (1990), 1569–1590.
- [18] O. Axelsson and P.S. Vassilevski, *A black box generalized conjugate gradient solver with inner iterations and variable-step preconditioning*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **12** (1991), 625–644.
- [19] O. Axelsson and P.S. Vassilevski, *Variable-step multilevel preconditioning methods, I: Self-adjoint and positive definite elliptic problems*, Num. Lin. Alg. Appl. **1** (1994), pp. 75–101.
- [20] R. Bank and T. Dupont, *An optimal order process for solving finite element equations*, Math. Comp. **36** (1981), 427–458.
- [21] B. Bejanov, J. Guermond and P. Minev, *A locally div-free projection scheme for incompressible flows based on non-conforming finite elements*, Int. J. Numer. Meth. Fluids, **49**, 2005, 239–258.

- [22] G. Bencheva, I. Georgiev, S. Margenov, *Two-level preconditioning of Crouzeix-Raviart anisotropic FEM systems*, Large-Scale Scientific Computing, Springer LNCS, **2907** (2004), 76–84.
- [23] R. Blaheta, S. Margenov, M. Neytcheva, *Uniform estimate of the constant in the strengthened CBS inequality for anisotropic non-conforming FEM systems*, Numer. Linear Algebra Appl., **11** (2004), 309–326.
- [24] R. Blaheta, S. Margenov, M. Neytcheva, *Robust optimal multilevel preconditioners for non-conforming finite element systems*, Numer. Lin. Alg. Appl., **12(5-6)** (2005), 495–514.
- [25] P. Boyanova, S. Margenov, M. Neytcheva, *Robust AMLI Methods for Parabolic Crouzeix-Raviart FEM Systems*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **235(2)** (2010), 380–390.
- [26] D. Braess, *Finite Elements: Theory, Fast Solvers, and Applications in Solid Mechanics*. Cambridge University Press, 2001, Second Edition.
- [27] J. Bramble, *Multigrid methods*, Longman Scientific & Technical, 1993.
- [28] S. Brenner, L. Scott, *The mathematical theory of finite element methods*, Springer-Verlag, 1994.
- [29] F. Brezzi, M. Fortin, *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1991.
- [30] A.J. Chorin, *Numerical solution of the Navier–Stokes equations*, Mathematics of Computation 1968; 22:745–762.
- [31] M. Crouzeix, P.-A. Raviart, *Conforming and non-conforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations*, RAIRO Anal. Numér. **7 R-3** (1973), 33–76.
- [32] V. Eijkhout, P. Vassilevski, *The role of the strengthened Cauchy-Bunyakowski-Schwarz inequality in multilevel methods*, SIAM Review **33** (1991), 405–419.
- [33] R. Fedorenko, *On a relaxation method for solving discrete elliptic equations*, J. Comp. Math. and Math. Phys., 1-5 (1961), 922–927.
- [34] I. Georgiev, J. Kraus, S. Margenov, *Multilevel preconditioning of 2D Rannacher-Turek FE problems; additive and multiplicative methods*, pp. 56–64. Springer LNCS 4310, 2007.
- [35] I. Georgiev, J. Kraus, S. Margenov, *Multilevel preconditioning of rotated bilinear non-conforming FEM problems*, Comput. Math. Appl. **55** (2008), 2280–2294.

- [36] V. Girault, P.-A. Raviart, *Finite Element Methods for Navier–Stokes Equations*, Springer Series in Computational Mathematics (Theory and Algorithms). Springer, Berlin, 1986.
- [37] G.H. Golub and C.F. van Loan, *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, 1989.
- [38] W. Hackbusch, *Multi-Grid Methods and Applications*, Springer-Verlag, 1985.
- [39] X. He, M. Neytcheva, S. Serra Capizzano, *On an augmented Lagrangian-based preconditioning of Oseen type problems*, BIT Numerical Mathematics, DOI: 10.1007/s10543-011-0334-4.
- [40] J. Kraus, *An algebraic preconditioning method for M-matrices: Linear versus nonlinear multilevel iteration*, Num. Lin. Alg. Appl. **9** (2002), 599–618.
- [41] J. Kraus and S. Margenov, *Multilevel methods for anisotropic elliptic problems*, Lectures on Advanced Computational Methods in Mechanics, Radon Series Comp. Appl. Math., **1** (2007), 47–87.
- [42] J. Kraus, S. Margenov, *Robust Algebraic Multilevel Methods and Algorithms*, Radon Series on Computational and Applied Mathematics, 5, de Gruyter, 2009.
- [43] J. Kraus, S. Margenov and J. Synka, *On the multilevel preconditioning of Crouzeix-Raviart elliptic problems*, Num. Lin. Alg. Appl., **15** (2008), 395–416.
- [44] J. Kraus, V. Pillwein, and L. Zikatanov, *Algebraic multilevel iteration methods and the best approximation to $1/x$ in the uniform norm*, RICAM-Report No. 2009-17.
- [45] J. Kraus and S. Tomar, *A multilevel method for discontinuous Galerkin approximation of three-dimensional anisotropic elliptic problems*, Num. Lin. Alg. Appl. **15** (2008), 417–438.
- [46] J. Kraus and S. Tomar, *Multilevel preconditioning of elliptic problems discretized by a class of discontinuous Galerkin methods*, SIAM J. Sci. Comput. **30** (2008), pp. 684–706.
- [47] R. Lazarov and S. Margenov, *CBS constants for multilevel splitting of graph-Laplacian and application to preconditioning of discontinuous Galerkin systems*, J. Complexity, **23**(4-6) (2007), 498-515.

- [48] R. Lazarov, P.S. Vassilevski, and S. Margenov, *Solving elliptic problems by the domain decomposition method using precondition matrices derived by multilevel splitting of finite element matrix*, Proceedings of the 1st Int. Conf. on Supercomputing (Greece) (1987), 826–835.
- [49] J. F. Maitre and F. Musy, *The contraction number of a class of two-level methods; an exact evaluation for some finite element subspaces and model problems*, Lect. Notes Math. **960** (1982), 535–54.
- [50] S. Margenov and J. Synka, *Generalized aggregation-based multilevel preconditioning of Crouzeix-Raviart FEM elliptic problems*, RICAM, Report, Linz, 2006. No. 2006-23.
- [51] Y. Notay, *Flexible conjugate gradients*, SIAM J. Sci. Comput. **22** (2000), pp. 1444–1460.
- [52] Y. Saad, *Iterative methods for sparse linear systems*, PWS Publishing Company, Boston, 1996.
- [53] R. Temam, *Sur l'approximation de la solution des équations de Navier–Stokes par la méthode des pas fractionnaires ii*, Archive for Rational Mechanics and Analysis 1969; **33**:377–385.
- [54] P.S. Vassilevski, *On two ways of stabilizing the hierarchical basis multilevel methods*, Siam Review **39** (1997), 18–53.
- [55] P.S. Vassilevski, *Multilevel Block Factorization Preconditioners: Matrix-based Analysis and Algorithms for Solving Finite Element Equations*, Springer, 2008.