6 Метод на разделяне на променливите.

Нека разгледаме системата

$$A\mathbf{u} = \mathbf{f} \tag{6.1}$$

за моделната задача

$$-\Delta u = f$$

в единичния квадрат $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ с хомогенни гранични условия на Дирихле върху цялата граница $\Gamma_D = \partial\Omega$. За дискретизация е приложен МКЕ при триангулация $\mathcal{T}$ върху равномерна мрежа със стъпка $h = \dfrac{1}{(n+1)}$.

6.1 Изчислителен алгоритъм.

Както е известно, в сила е блочното представяне

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & -I & & & \\ -I & A_{2,2} & -I & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & -I & A_{i,i} & -I & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & -I & A_{n,n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \cdots \\ \mathbf{u}_i \\ \cdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \cdots \\ \mathbf{f}_i \\ \cdots \\ \mathbf{f}_n \end{bmatrix},$$

където

$$A_{i,i} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

При тези предположения, системата (6.1) има вида

$$\left| \begin{array}{l} A_{1,1}\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{f}_1 \\ -\mathbf{u}_{i-1} + A_{i,i}\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{f}_i, \qquad i = 2, n-1 \\ -\mathbf{u}_{n-1} + A_{n,n}\mathbf{u}_n = \mathbf{f}_n \end{array} \right. \tag{6.2}$$

Нека означим с W матрицата от ортонормираните собствени вектори на $A_{i,i}$, подредени по стълбове. Тъй като тридиагоналните матрици с коефициенти (-1,2,-1) и (-1,4,-1) имат едни и същи собствени вектори, то

$$W = \{w_{i,j}\}_{i,j=1}^{n} = \left\{\sqrt{2h}\sin ij\pi h\right\}_{i,j=1}^{n}.$$

Последното равенство пряко следва от спектралния анализ при изследване на числото на обусловеност на моделната задача.
В сила е равенството

$$A_{i,i}W = WD, \tag{6.3}$$

където с $D = diag(\lambda_i)$ е означена диагоналната матрица от собствените числа на $A_{i,i}$. Прилагаме ортонормираността на собствените вектори, т.е.,

$$W^T W = W W^T = I$$

към (6.3) и получаваме представянето

$$A_{i,i} = WDW^T.$$

Нека положим

$$\mathbf{v}_i := W^T\mathbf{u}_i, \qquad \mathbf{g}_i := W^T\mathbf{f}_i, \qquad i = 1, n.$$

Умножаваме отляво (6.2) с W^T и получаваме еквивалентната система

$$\left| \begin{array}{l} D\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{g}_1 \\ -\mathbf{v}_{i-1} + D\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{g}_i, \qquad i = 2, n-1 \\ -\mathbf{v}_{n-1} + D\mathbf{v}_n = \mathbf{g}_n \end{array} \right. \tag{6.4}$$

Нека пренаредим системата (6.4), като групираме уравненията в които участва едно и също собствено число λ_i. Така получаваме n независими системи с тридиагонални матрици, които решаваме по метода на прогонката. Последната стъпка от алгоритъма е да намерим неизвестните $\mathbf{u}_i$ по формулата

$$\mathbf{u}_i := W\mathbf{v}_i, \qquad i = 1, n.$$

6.2 Изчислителна сложност. Бързо преобразуване на Фурие.

Разгледаният метод на разделяне на променливите включва следните три стъпки:

1. $\mathbf{g}_i := W^T \mathbf{f}_i, \qquad i = 1, n;$
2. решаване на n тридиагонални системи с n неизвестни;
3. $\mathbf{u}_i := W \mathbf{v}_i, \qquad i = 1, n.$

В съответствие с тези стъпки, записваме изчислителната сложност на алгоритъма във вида

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2 + \mathcal{N}_3.$$

Тук

$$\mathcal{N}_2 \sim n \cdot 8n = O(n^2) = O(N).$$

На пръв поглед, изпълняване на умножение на матрица по вектор от вида $W\mathbf{x}$ или $W^T\mathbf{x}$ изисква $O(n^2) = O(N)$ аритметични операции. Този резултат съществено може да се подобри, ако за целта се приложи бързо преобразувание на Фурие (FFT). По този начин получаваме

$$\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_3 = nO(n \log n) = O(N \log N)$$

и следователно

$$\mathcal{N} = O(N \log N).$$

Забележка 6.1 *Нека припомним, че един алгоритъм се нарича оптимален, когато има изчислителна сложност $\mathcal{N} = O(N)$ и съответно почти оптимален, когато $\mathcal{N} = O(N \log N)$.*

Забележка 6.2 *Известно е, че представеният почти оптимален алгоритъм за моделната задача се обобщава със запазване на изчислителната сложност за по-общото уравнение с разделящи се променливи, което има вида*

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(b(y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) = f.$$