5 Метод на вложените сечения.

5.1 Ефективност на метода на Гаус за решаване на системи с разредени матрици.

Нека е дадена системата

$$A\mathbf{u} = \mathbf{f},$$

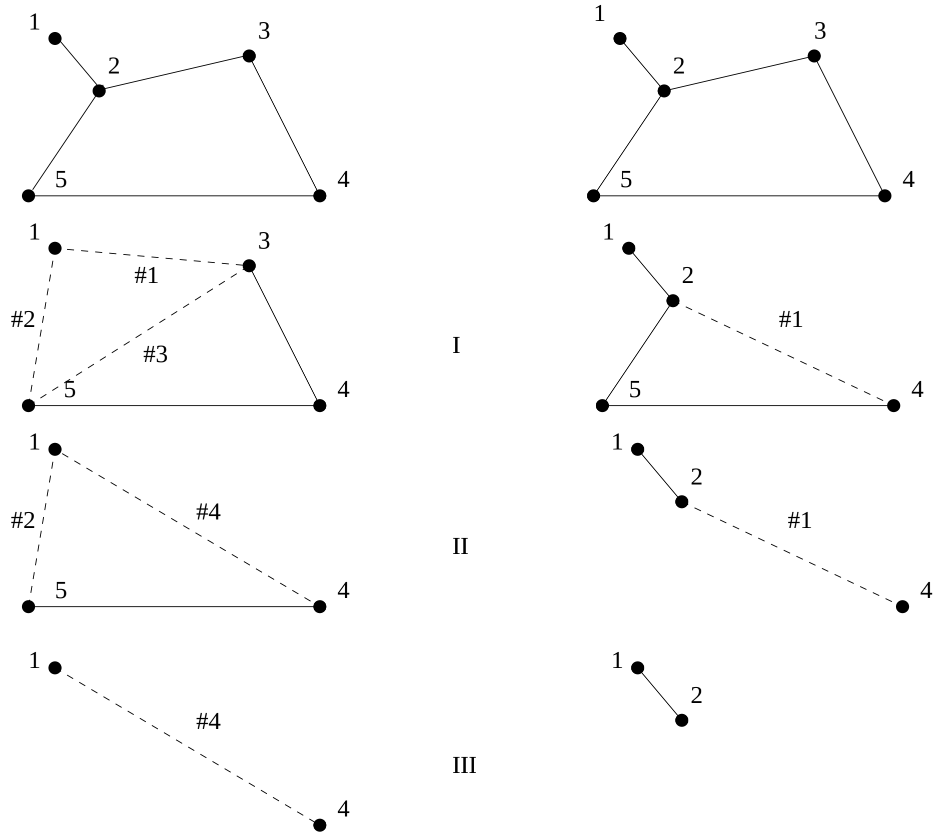
където A е разредена матрица. Адаптирането на метода на Гаус към структурата на разредената матрица е необходимо условие за конструиране на ефективен алгоритъм за решаване на такива системи. Добре известно е, че в процеса на Гаусова елиминация, матрицата става все по-малко разредена. По-точно, при изключване на неизвестното u_k, за всеки елемент $a_{i,j}^{(k)}$, $i, j > k$ се добавя ненулев член, ако $a_{i,k}^{(k-1)} \neq 0$ и $a_{k,j}^{(k-1)} \neq 0$. Очевидно, процесът на запълване на матрицата зависи от номерацията на неизвестните.

Апаратът на теорията на графите се използва за описание на структурата на разредените матрици. Нека означим с $G(A) = (V, E)$ графа асоцииран с матрицата A. Неизвестните на системата съответстват на върховете на графа V, а ненулевите елементи a_{ij} на матрицата A определят ребрата на графа E. В този смисъл, казваме че неизвестните u_i и u_j са свързани, когато $a_{ij} \neq 0$. Когато матрицата е симетрична, графът е неориентиран. Съответно, когато матрицата е несиметрична, графът трябва да е ориентиран. В следващите разглеждания ще предполагаме, че номерацията на неизвестните е такава, че диагоналните елементи на матрицата са ненулеви.

На Фиг. 1 са представени два варианта на последователно изключване на симетрична матрица

$$A = \begin{bmatrix} * & * & & & \\ * & * & * & & * \\ & * & * & * & \\ & & * & * & * \\ & * & & * & * \end{bmatrix},$$

където със звездичка са маркирани ненулевите елементи. Тук с римски цифри са означени първите три стъпки на Гаусова елиминация, с пунктирана линия са показани новопоявилите се ребра (връзки) в графите на редуцираната матрица. С $\#i$ са номерирани новите ненулеви извъндиагонални елементи, които при последователност на изключване (2,3,5,4,1) са четири, докато за алтернативната последователност (3,5,4,2,1) е само един.



Фигура 1: Поява на нови ненулеви елементи: а) ляво: последавателност на изключване (2,3,5,4,1); б) дясно: последавателност на изключване (3,5,4,2,1).

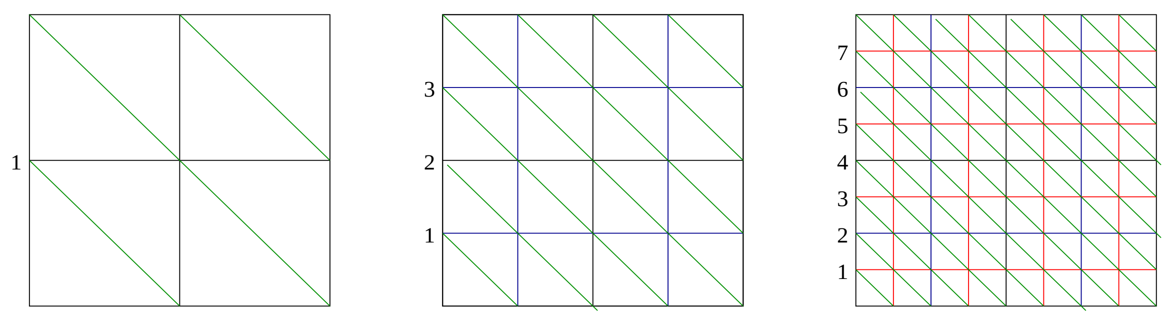
Конструирането на ефективен метод на Гаус за системи с разредени матрици се свежда до намирането на последователност на изключване, за която броят на новите ненулеви извъндиагонални елементи е минимален. За съжаление, тази задача е NP - пълна.

Един алтернативен подход за намиране на ефективна последователност на Гаусова елиминация се основава на рекурсивно конструиране на разделители на графи. Вариантите на метода на Гаус, които се получават по този начин са известни с името *метод на вложените сечения*. В следващите раздели на тази глава ще представим първия метод от този клас, предложен от Алън Джордж.

5.2 Моделна задача.

Нека A е матрица, получена при дискретизация на елиптична гранична задача в единичния квадрат $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ с гранични условия на Дирихле върху цялата граница $\Gamma_D = \partial\Omega$, където триангулацията $\mathcal{T}$ е построена върху равномерна мрежа със стъпка $h = 1/(n+1)$.

Нека мрежата е построена чрез последователно двукратно сгъстяване по всяко едно от координатните направления, както е показано на Фиг. 2. Тогава, в сила са равенствата



Фигура 2: Равномерно сгъстяване на мрежата: $n_k = 1, 3, 7$.

$$n_k = 2^k - 1, \qquad k = 1, \cdots, \ell,$$

където с k е означено нивото на сгъстяване на мрежата. На всяко k съответства мрежа $\mathcal{T}_k$ с параметри

$$n_k, \qquad N_k = n_k^2, \qquad A^{(k)},$$

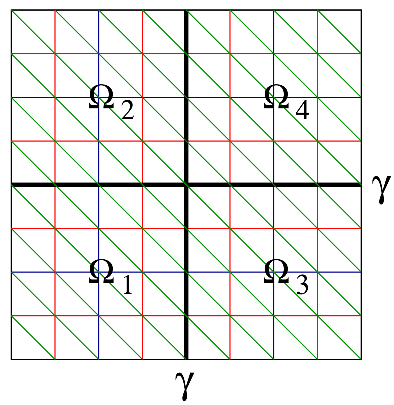
където $A^{(k)}$ е матрицата на коравина за мрежата $\mathcal{T}_k$. Нашата цел е да построим алгоритъм за решаване на задачата, съответстваща на най-фината мрежа, т.е. при

$$n = n_\ell = 2^\ell - 1, \qquad N = N_\ell = n_\ell^2, \qquad A = A^{(\ell)}.$$

В сила е равенството

$$n_k = 2n_{k-1} + 1.$$

Нека разгледаме блочно 2×2 представяне на матрицата $A^{(k)}$



Фигура 3: Разделяне на областта Ω в метода на вложените сечения.

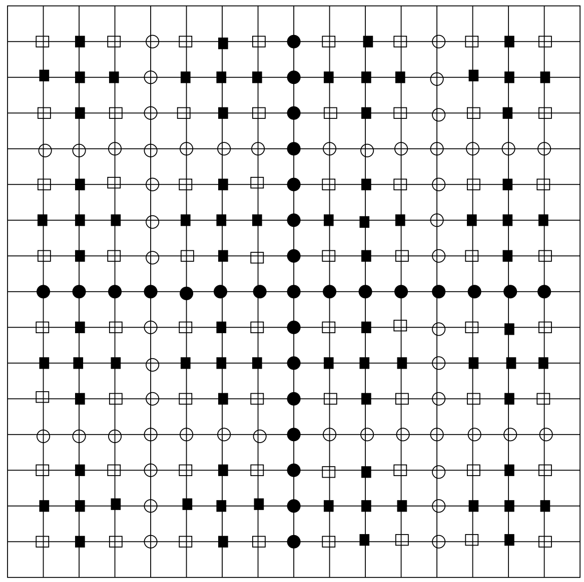
$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} A_{1,1}^{(k)} & A_{1,2}^{(k)} \\ A_{2,1}^{(k)} & A_{2,2}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} & \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4 \\ \} & \gamma \end{matrix} \tag{5.1}$$

където блокът $A_{1,1}^{(k)}$ съответсва на възлите от вътрешните подобласти Ω_i, $i = 1, 2, 3, 4$, а $A_{2,2}^{(k)}$ на възлите от вътрешната граница (интерфейса) γ (виж Фиг. 3). Очевидно $A_{1,1}^{(k)}$ има блочно диагонална структура, като всеки един от диагоналните блокове съответства на дискретизация на задача на Дирихле в подобластта Ω_i при ниво на сгъстяване $(k-1)$, т.е.

$$A_{1,1}^{(k)} = \begin{bmatrix} A_1^{(k-1)} & & & \\ & A_2^{(k-1)} & & \\ & & A_3^{(k-1)} & \\ & & & A_4^{(k-1)} \end{bmatrix}.$$

5.3 Метод на вложените сечения.

Методът, предложен от Алън Джордж, се основава на рекурсивно разделяне на графа на матрицата, като номерацията започва от неизвестните, съответстващи на единствените възли във всяка от подобластите след $(\ell - 1)$-вото разделяне.



Фигура 4: Рекурсивно разделяне на областта Ω в метода на вложените сечения: $\ell = 4$.

На Фиг. 4 е показан процесът на последователно разделяне на вложени сечения. Съответните разделители са означени с плътно кръгче, празно кръгче и плътно квадратче. Номерацията на възлите започва от възлите означени с празно квадратче и следва вложените разделители в съответните подобласти.

Нека означим с $\mathcal{N}_{ND}^f$ и $\mathcal{N}_{ND}^b$ изчислителната сложност на правия и обратния ход в метода на Гаус. Следователно общата изчислителна сложност $\mathcal{N}_{ND}$ на метода се записва във вида

$$\mathcal{N}_{ND} = \mathcal{N}_{ND}^f + \mathcal{N}_{ND}^b.$$

Правият ход започва с изключване на несвързаните неизвестни, съответстващи на подобластите (всяка от тях съдържа само по един възел) получени след $(\ell-1)$-вото разделяне. След това, на всяка следваща стъпка от правия ход, за всяка подобласт на текущото разделяне, изключваме локално неизвестните съответстващи на поредния разделител. Така, на k-тата стъпка от правия ход привеждаме във вид на горна триъгълна матрица $4^{\ell-k}$ блока с размерност $(2n_k - 1) \times (2n_k - 1)$. В общия случай, всеки един от тези блокове е плътна матрица, като неговото изключване променя само коефициенти на редуцираната матрица, съответстващи на възли от границата на подобластта. Тези възли са не повече от $4(n_k+1)$. За всяка подзадача, пресмятането на броя на аритметичните операции се прави както в метода на Гаус за системи с плътни матрици. Така получаваме оценките

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{ND}^{f} &< \sum_{k=1}^{\ell} 4^{\ell-k} \sum_{i=4(n_k+1)+1}^{6n_k+3} (2i^2-i) \\
&= \sum_{k=1}^{\ell} 4^{\ell-k} \sum_{i=2^{k+2}+1}^{2^{k+2}+2^{k+1}-3} (2i^2-i) \\
&\sim \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{\ell} 4^{\ell-k} \left[(2^{k+2}+2^{k+1}-3)^3 - (2^{k+2})^3 \right] \\
&\sim 3 \sum_{k=1}^{\ell} 4^{\ell-k} 2^{3k+5} = 2^{2\ell+6} \sum_{k=1}^{\ell} 2^k \le 2^{3\ell+7}.
\end{aligned}$$

Следователно

$$\mathcal{N}_{ND}^{f} = O(n^3) = O(N^{3/2}). \tag{5.2}$$

Матрицата, получена след изпълнение на правия ход има специална блочно триъгълна структура с горни триъгълни диагонални блокове. За всеки от диагоналните блокове прилагаме обратния ход в метода на Гаус. Така получаваме оценките

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{ND}^{b} &< \sum_{k=1}^{\ell} 4^{\ell-k} \left[(2n_k-1)^2 + 4(n_k+1)(2n_k-1) \right] \\
&= \sum_{k=1}^{\ell} 4^{\ell-k} \left[(2^{k+1}-3)^2 + 4\ 2^k(2^{k+1}-3) \right] \\
&\sim \sum_{k=1}^{\ell} 2^{2(\ell-k)} 12\ 2^{2k} = 12\ \ell\ 2^{2\ell} \\
&= O(n^2 \log n) = O(N \log N)
\end{aligned}$$

Така за изчислителната сложност на метода на вложените сечения за разгледаната моделна задача получаваме оценката

$$\mathcal{N}_{ND} = \mathcal{N}_{ND}^{f} + \mathcal{N}_{ND}^{b} = O(N^{3/2}).$$

Забележка 5.1 *Оценката за метода на вложените сечения*

$$\mathcal{N}_{ND} = O(N^{3/2})$$

е най-добрият известен резултат за пряк метод за решаване на системи с разредени матрици. Такава оценка е в сила при много общи предположения за системи, които са получени при дискретизация по МКЕ или МКР на елиптични гранични задачи в произволна полигонална област Ω *в равнината. В още по-обща постановка, такава оценка е в сила за разредени матрици, които имат равнинен граф на свързаност, представящ ненулевите елементи. В основата на общата теория на метода на вложените сечения са алгоритмите за разделяне на равнинни графи.*