4 Блочна факторизация. Допълнение на Шур.

4.1 Блочна факторизация. Допълнение на Шур.

Разглеждаме системата

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Нека симетричната и положително определена матрица A е представена в 2×2 блочен вид

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

и нека $\mathbf{x}$ и $\mathbf{b}$ са записани в съгласуваната с (4.1) форма

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}.$$

Лема 4.1 *Всеки от диагоналните блокове в (4.1) е симетрична и положително определена матрица.*

Доказателство. Симетричността следва директно. Ще докажем, $A_{1,1}$ е положително определена. Нека

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

където $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}$. Следователно $\mathbf{x} \neq 0$ и

$$\mathbf{x}_1^T A_{1,1} \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0,$$

с което твърдението е доказано. Положителната определеност на $A_{2,2}$ се получава напълно аналогично. ∎

Лема 4.2 *В сила е факторизацията*

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \\ A_{2,1} & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & A_{1,1}^{-1} A_{1,2} \\ & I_2 \end{bmatrix}, \tag{4.2}$$

където

$$S = A_{2,2} - A_{2,1} A_{1,1}^{-1} A_{1,2}$$

и I_1 и I_2 са съгласувани по размерност единични матрици.

Доказателство. Равенството се проверява директно. ■

Матрицата S се нарича допълнение на Шур.

Лема 4.3 *Нека* $\mathbf{x}_2$ *е фиксирано и нека* $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$. *Тогава,*

$$\mathbf{x}_2^T S \mathbf{x}_2 = \min_{\mathbf{x}_1} \quad \mathbf{x}^T A \mathbf{x}.$$

Доказателство.

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^T A \mathbf{x} &= [\mathbf{x_1}^T \ \mathbf{x_2}^T] \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{x}_1^T A_{1,1} \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_1^T A_{1,2} \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_2^T A_{2,1} \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2^T A_{2,2} \mathbf{x}_2 \\
&\quad + \mathbf{x}_2^T A_{2,1} A_{1,1}^{-1} A_{1,2} \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2^T A_{2,1} A_{1,1}^{-1} A_{1,2} \mathbf{x}_2 \\
&= \mathbf{x}_2^T S \mathbf{x}_2 + \left(\mathbf{x}_1 + A_{1,1}^{-1} A_{1,2} \mathbf{x}_2\right)^T A_{1,1} \left(\mathbf{x}_1 + A_{1,1}^{-1} A_{1,2} \mathbf{x}_2\right) \\
&\geq \mathbf{x}_2^T S \mathbf{x}_2
\end{aligned}$$

С това твърдението е доказано, като очевидно равенството се достига за

$$\mathbf{x}_1 = -A_{1,1}^{-1} A_{1,2} \mathbf{x}_2^T.$$

■

Следствие 4.1 *Допълнението на Шур е симетрична и положително определена матрица.*

4.2 Решаването на система с факторизирана матрица.

Системата

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$$

се запива във вида

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & \\ A_{2,1} & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & A_{1,1}^{-1}A_{1,2} \\ & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}.$$

Така задачата се свежда до решаване на две системи с триъгълни матрици:

$$\left| \begin{array}{lcl} A_{1,1}\mathbf{y}_1 & = & \mathbf{b}_1 \\ A_{2,1}\mathbf{y}_1 + S\mathbf{y}_2 & = & \mathbf{b}_2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{lcl} \mathbf{y}_1 & = & A_{1,1}^{-1}\mathbf{b}_1 \\ \mathbf{y}_2 & = & S^{-1}\left(\mathbf{b}_2 - A_{2,1}\mathbf{y}_1\right), \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{lcl} \mathbf{x}_1 + A_{1,1}^{-1}A_{1,2}\mathbf{x}_2 & = & \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{x}_2 & = & \mathbf{y}_2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{lcl} \mathbf{x}_2 & = & \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{x}_1 & = & \mathbf{y}_1 - A_{1,1}^{-1}A_{1,2}\mathbf{x}_2, \end{array} \right.$$

където

$$\begin{bmatrix} I_1 & A_{1,1}^{-1}A_{1,2} \\ & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix}.$$

Следователно решаването на системата с факторизирана матрица включва решаването на две подзадачи с матрицата $A_{1,1}$ и една с допълнението на Шур S. Следователно, ако матрицата A е разредена и има размерност $n \times n$, то изчислителната сложност може да се запише във вида

$$\mathcal{N}(A^{-1}\mathbf{v}) = 2\mathcal{N}(A_{1,1}^{-1}\mathbf{v}_1) + \mathcal{N}(S^{-1}\mathbf{v}_2) + O(n).$$

Тук с $\mathbf{v}$ е означена произволна дясна част, за която се решава съответната система, а членът $O(n)$ съответства на участващите в алгоритъма умножения на вектори с разредени матрици и събиране на вектори.

Забележка 4.1 *Особено важно е да отбележим, че допълнението на Шур, получено при факторизация на разредена матрица, в общия случай не е разредена матрица.*

Блочната факторизация е един от подходите за конструиране на приближения C на матрицата A, които имат специални свойства. Такива приближения (преобусловители) се използват при построяване на ефективни итерационни методи. В тези конструкции допълнението на Шур се заменя с подходяща разредена матрица, като целта е да се минимизира спектралното число на обусловеност, т.е. да бъде в сила неравенството

$$\kappa(C^{-1}A) << \kappa(A).$$

4.3 Варианти на блочна факторизация.

1. LU **- блочна факторизация:**

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \\ A_{2,1} & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & A_{1,1}^{-1}A_{1,2} \\ & I_2 \end{bmatrix}.$$

   Тази факторизация е в сила при най общи предположения, ако блокът $A_{1,1}$ е неособен.

2. LDL^T **- блочна факторизация:**

$$A = \begin{bmatrix} I_1 & \\ A_{2,1}A_{1,1}^{-1} & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1,1} & \\ & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & A_{1,1}^{-1}A_{1,2} \\ & I_2 \end{bmatrix}.$$

   Това представяне е в сила когато матрицата е симетрична.

3. LL^T **- блочна факторизация:**

$$A = \begin{bmatrix} L_{1,1} & \\ L_{2,1} & L_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{1,1} & L_{1,2} \\ & L_{2,2}, \end{bmatrix}.$$

   Това е блочен вариант на факторизация по метода на квадратния корен и е в сила за симетрични и положително определени матрици. Тогава

$$L_{1,1} = A_{1,1}^{1/2},$$

$$L_{1,2} = A_{1,1}^{-1/2}A_{1,2},$$

$$L_{2,1} = A_{2,1}A_{1,1}^{-1/2},$$

$$L_{2,2}^2 = A_{2,2} - A_{2,1}A_{1,1}^{-1}A_{1,2} \qquad \Longrightarrow L_{2,2} = S^{1/2}.$$