3 Преки методи. Метод на Гаус. Метод на квадратния корен. Изчислителна сложност.

Преките методи за решаване на системи от линейни алгебрични уравнения по своята същност са варианти на метода на последователно изключване на Гаус. Тук ще разгледаме три представителя на тази група, като ще акцентираме на тяхната изчислителна сложност, т.е. на броя аритметични операции $\mathcal{N}(n)$, необходими за тяхната реализация.

3.1 Метод на Гаус.

Разглеждаме системата

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Разширената матрица $\tilde{A}$, която се получава след добавяне на вектора от десните части има вида

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,i} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,i} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,i} & \cdots & a_{i,n} & b_i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,i} & \cdots & a_{n,n} & b_n \end{array}\right]$$

Методът на Гаус се състои от прав ход, при който матрицата се преобразува до горна триъгълна и обратен ход, на който се решава модифицираната система. На първата стъпка от правия ход последователно умножаваме първия ред на матрицата с $-\dfrac{a_{i,1}}{a_{1,1}}$ и го прибавяме към i-тия ред за всяко $i = 2, \cdots, n$. Така получаваме модифицираната матрица $\tilde{A}^{(1)}$, която има само нули под диагонала в първия стълб.

$$\tilde{A}^{(1)} = \left[\begin{array}{cccccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,i} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ & a_{2,2}^{(1)} & \cdots & a_{2,i}^{(1)} & \cdots & a_{2,n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & a_{i,2}^{(1)} & \cdots & a_{i,i}^{(1)} & \cdots & a_{i,n}^{(1)} & b_i^{(1)} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & a_{n,2}^{(1)} & \cdots & a_{n,i}^{(1)} & \cdots & a_{n,n}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right]$$

На втората стъпка от правия ход умножаваме втория ред на матрицата $\tilde{A}^{(1)}$ с $-\dfrac{a_{i,2}^{(1)}}{a_{2,2}^{(1)}}$ и го прибавяме към i-тия ред за всяко $i = 3, \cdots, n$. Така след $(n-1)$ стъпки получаваме модифицирана горна триъгълна матрица, т.е.

$$\tilde{A}^{(n-1)} = \left[\begin{array}{cccccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,i} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ & a_{2,2}^{(1)} & \cdots & a_{2,i}^{(1)} & \cdots & a_{2,n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & a_{i,i}^{(i-1)} & \cdots & a_{i,n}^{(i-1)} & b_i^{(i-1)} \\ & & & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & a_{n,n}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array}\right]$$

За изчислителната сложност на правия ход получаваме рекурентната формула

$$\mathcal{N}_f(n) = 2(n-1)n + n + \mathcal{N}_f(n-1)$$

и следователно

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_f(n) &= \sum_{i=2}^{n}(2i^2 - i) = \sum_{i=1}^{n}(2i^2 - i) - 1 \\ &= 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} - 1 \\ &\sim \frac{2n^3}{3} \end{aligned}$$

На обратния ход последователно пресмятаме $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_i, \cdots, x_1$. На i-тата стъпка се изпълняват $(i-1)$ умножения, $(i-1)$ събирания и едно деление.

Следователно

$$\mathcal{N}_b(n) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2.$$

Общо правило е, че изчислителната сложност се определя от правия ход. Така окончателният резултат за метода на Гаус е

$$\mathcal{N}^G \sim \frac{2n^3}{3} = O(n^3).$$

3.2 Метод на квадратния корен.

Методът на квадратния корен се прилага при симетрични и положително определени матрици. На правия ход матрицата се факторизира във вида $D = LL^T$, където L е долна триъгълна. Следователно търсим представяне във вида

$$A = \begin{bmatrix} l_{1,1} & & & & & \\ l_{2,1} & l_{2,2} & & & & \\ \cdots & \cdots & & & & \\ l_{i,1} & l_{i,2} & \cdots & l_{i,i} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & l_{n,i} & \cdots & l_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{1,1} & l_{2,1} & \cdots & l_{i,1} & \cdots & l_{n,1} \\ & l_{2,2} & \cdots & l_{i,2} & \cdots & l_{n,2} \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & l_{i,i} & \cdots & l_{n,i} \\ & & & & \cdots & \cdots \\ & & & & & l_{n,n} \end{bmatrix}$$

Коефициентите $l_{i,j}$ се пресмятат рекурсивно, както следва

$a_{1,1} = l_{1,1}^2$	$\Longrightarrow$	$l_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}}$
$a_{2,1} = l_{2,1}l_{1,1}$	$\Longrightarrow$	$l_{2,1} = \frac{1}{l_{1,1}}a_{2,1}$
$a_{2,2} = l_{2,1}^2 + l_{2,2}^2$	$\Longrightarrow$	$l_{2,2} = \sqrt{a_{2,2} - l_{2,1}^2}$
$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$

$$
\begin{array}{lcl}
\hline
a_{i,1} = l_{i,1} l_{1,1} & \Longrightarrow & l_{i,1} = \dfrac{1}{l_{1,1}} a_{i,1} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
a_{i,k} = \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} l_{i,j} l_{j,k} + l_{i,k} l_{k,k} & \Longrightarrow & l_{i,k} = \dfrac{1}{l_{k,k}} \left(a_{i,k} - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} l_{i,j} l_{j,k} \right) \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
a_{i,i} = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} l_{i,j}^2 & \Longrightarrow & l_{i,i} = \sqrt{a_{i,i} - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} l_{i,j}^2} \\
\hline
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\hline
\end{array}
$$

Така за броя на аритметичните операции, необходими за пресмятане на коефициентите $l_{i,j}$ за $i = 1, 2, \cdots, n$ получаваме

$$
\begin{array}{lcl}
1 & \Longrightarrow & 1 \\
2 & \Longrightarrow & 1 + 3 \\
\cdots & \cdots & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
i & \Longrightarrow & 1 + 3 + \quad \cdots \quad + (2i - 1) \\
\cdots & \cdots & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
n & \Longrightarrow & 1 + 3 + \quad \cdots \quad + (2n - 1)
\end{array}
$$

и следователно

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}_f(n) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} (2k - 1) = \sum_{i=1}^{n} \left[2 \frac{i(i+1)}{2} - i \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \sim \frac{n^3}{3}
\end{aligned}
$$

Решаването на факторизираната система е еквивалентно на двукратно прилагане на обратния ход от метода на Гаус и следователно

$$
\mathcal{N}_b(n) = 2n^2
$$

Така за изчислителната сложност на метода на квадратния корен получаваме

$$
\mathcal{N}^{LL^T}(n) \sim \frac{n^3}{3} = O(n^3).
$$

Следователно методът на квадратния корен е два пъти по-бърз от метода на Гаус, което е пряк резултат от това, че при решаването на системата отчитаме симетрията на матрицата A.

3.3 Метод на квадратния корен за системи с лентови матрици.

Нека A е симетрична и положително определена лентова матрица с ширина на лентата $w = 2d + 1$, т.е.

$$a_{i,j} = 0 \qquad \forall (i,j): \quad |i-j| > d.$$

С d е означена ширината на полулентата, виж Фиг. 1.

$$\begin{array}{l}
\mathbf{1}\\
\mathbf{2}\\
\\
\\
\\
\mathbf{d}\\
\mathbf{d+1}\\
\mathbf{d+2}\\
\\
\\
\\
\\
\\
\\
\\
\mathbf{i}\\
\\
\\
\\
\mathbf{n}
\end{array}
\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
&&*&*&*&*&*\\
&&*&*&*&*&*&*\\
&&*&*&*&*&*&*&*\\
&&*&*&*&*&*&*&*&*\\
&&*&*&*&*&*&*&*&*&*\\
&&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*\\
&&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*\\
&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*\\
&&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*\\
&&&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*\\
&&&&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*\\
&&&&&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*\\
&&&&&&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*\\
&&&&&&&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*\\
&&&&&&&&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*\\
&&&&&&&&&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*\\
&&&&&&&&&&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*\\
&&&&&&&&&&&*&*&*&*&*&*&*&*&*\\
&&&&&&&&&&&&*&*&*&*&*&*&*&*\\
&&&&&&&&&&&&&*&*&*&*&*&*&*
\end{array}\right]$$

Фигура 1: Лентова матрица с ширина на полулентата $d = 6$.

Лема 3.1 *Нека $A = LL^T$ е факторизация по метода на квадратния корен на симетричната и положително определена матрица A. Тогава, ако A е лентова с ширина на полулентата d, то долната триъгълна матрица L е също лентова с ширина на лентата $d + 1$.*

Доказателство. По индукция ще докажем, че

$$a_{i,j} = 0 \qquad \forall (i,j): \quad |i-j| > d \quad \Longrightarrow \quad l_{i,j} = 0 \qquad \forall (i,j): \quad i - j > d.$$

За $i = d + 2$

$$l_{d+2,1} = \frac{a_{d+2,1}}{l_{1,1}} = 0$$

защото $d+2-1>d$. Нека допуснем, че твърдението е в сила за всеки ред с номер по-малък от i и за всяко $l_{i,j}$ при $j<k$. Нека $i-k>d$.

$$l_{i,k}=\frac{1}{l_{k,k}}\left(a_{i,k}-\sum_{j=1}^{k-1}l_{i,j}l_{j,k}\right).$$

Тук $a_{i,k}=0$. Освен това, за всяко $l_{i,j}$ от сумата

$$i-j\geq i-(k-1)=(i-k)+1>d \quad\Longrightarrow\quad l_{i,j}=0.$$

С това лемата е доказана. ∎

Като отчитаме лентовата структура на матрицата L, получаваме следната оценка за изчислителната сложност на факторизацията:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_f(n) &= \sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{i}(2k-1)+\sum_{i=d+1}^{n}\sum_{k=1}^{d+1}(2k-1)\\
&= \sum_{i=1}^{d}\left[2\frac{i(i+1)}{2}-i\right]+\sum_{i=d+1}^{n}\left[2\frac{(d+1)(d+2)}{2}-(d+1)\right]\\
&= \sum_{i=1}^{d}i^2+\sum_{i=d+1}^{n}(d+1)^2\\
&= \frac{d(d+1)(2d+1)}{6}+(n-d)(d+1)^2\sim nd^2=O(nd^2).
\end{aligned}$$

Оценката на изчислителната сложност на решението на факторизираната система е $\mathcal{N}_b(n)=O(nd)$ и следователно окнчателният резултат за изследвания алгоритъм е

$$\mathcal{N}_d^{LL^T}(n)=O(nd^2).$$

Пример: Нека разгледаме моделната задача с матрица

$$A=\begin{bmatrix}
A_{1,1} & A_{1,2} & & & & \\
A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
 & & A_{i,i-1} & A_{i,i} & A_{i,i+1} & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
 & & & & A_{n,n-1} & A_{n,n}
\end{bmatrix}.$$

Тук всеки от блоковете е с размерност $n \times n$. Ширината на полулентата е $d = n$ и следователно

$$\mathcal{N}_{MP}^{LL^T}(N) = O(d^2 N) = O(n^2 N) = O(N^2).$$