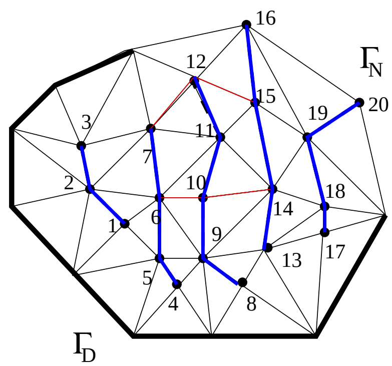
2 Структура на матрицата на коравина. Свойства. Спектрално число на обусловеност.

2.1 Структура на матрицата на коравина.

Матриците в метода на крайните елементи са разредени. Това се дължи на локалността на Лагранжевия базис. Нека разгледаме триангулацията $\mathcal{T}$, като граф. Очевидно, максималният брой на ненулеви елементи в стълб или ред на матрицата на коравина е равен на степента на този граф плюс единица. На Фиг. 1 е показана номерация на възлите, съответстваща на матрицата (2.1).



Фигура 1: Дискретизация по МКЕ.

$$A = \begin{bmatrix}
* & * & & & * & * & & & & & & & & & & & & & & \\
* & * & * & & & * & * & & & & & & & & & & & & & \\
& * & * & & & & * & & & & & & & & & & & & & \\
& & & * & * & & & & * & & & & & & & & & & & \\
* & & & * & * & * & & & * & & & & & & & & & & & \\
* & * & & & * & * & * & & * & * & * & & & & & & & & & \\
& * & * & & & * & * & & & * & * & & & & & & & & & \\
& & & & & & & * & * & & & & * & & & & & & & \\
& & & * & * & * & & * & * & * & & & * & * & & & & & & \\
& & & & & * & * & & * & * & * & & & * & & & & & & \\
& & & & & * & * & & & * & * & * & & * & * & & & & & \\
& & & & & & * & & & & * & * & & & * & * & & & & \\
& & & & & & & * & * & & & & * & * & & & * & * & & \\
& & & & & & & & * & * & * & & * & * & * & & & * & * & \\
& & & & & & & & & & * & * & & * & * & * & & & * & \\
& & & & & & & & & & & * & & & * & * & & & * & * \\
& & & & & & & & & & & & * & & & & * & * & & \\
& & & & & & & & & & & & * & * & & & * & * & * & \\
& & & & & & & & & & & & & * & * & * & & * & * & * \\
& & & & & & & & & & & & & & & * & & & * & *
\end{bmatrix} \qquad (2.1)$$

Структурата на матрицата на коравина зависи от номерацията. В комерсиалните програмни системи, реализиращи МКЕ, се прилагат специализирани алгоритми за преномерация. Когато системата от линейни уравнения се решава с помощта на пряк метод, целта най-често е да се минимизират ширината на лентата или профила на матрицата. В разгледания пример ненулевите елементи са разположени в лента с ширина 11, която включва главния диагонал и 5 кодиагонала над и под него.

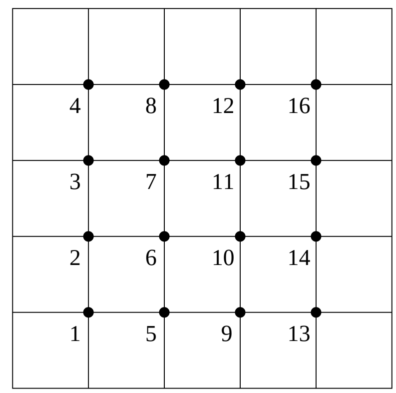
$$
A = \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
4 & -1 & & & -1 & & & & & & & & & & & \\
-1 & 4 & -1 & & & -1 & & & & & & & & & & \\
& -1 & 4 & -1 & & & -1 & & & & & & & & & \\
& & -1 & 4 & & & & -1 & & & & & & & & \\
\hline
-1 & & & & 4 & -1 & & & -1 & & & & & & & \\
& -1 & & & -1 & 4 & -1 & & & -1 & & & & & & \\
& & -1 & & & -1 & 4 & -1 & & & -1 & & & & & \\
& & & -1 & & & -1 & 4 & & & & -1 & & & & \\
\hline
& & & & -1 & & & & 4 & -1 & & & -1 & & & \\
& & & & & -1 & & & -1 & 4 & -1 & & & -1 & & \\
& & & & & & -1 & & & -1 & 4 & -1 & & & -1 & \\
& & & & & & & -1 & & & -1 & 4 & & & & -1 \\
\hline
& & & & & & & & -1 & & & & 4 & -1 & & \\
& & & & & & & & & -1 & & & -1 & 4 & -1 & \\
& & & & & & & & & & -1 & & & -1 & 4 & -1 \\
& & & & & & & & & & & -1 & & & -1 & 4
\end{array}\right] \tag{2.2}
$$

Нека разгледаме моделната задача

$$
-\Delta u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = f
$$

в единичния квадрат $\Omega = (0,1)\times(0,1)$ и условия на Дирихле върху границата $\Gamma = \partial\Omega$. Триангулацията $\mathcal{T}$ е построена върху равномерна правоъгълна мрежа със стъпка $h = 1/(n+1)$. Една естествена номерация е по вертикални линии от мрежата, както е показано на Фиг. 2.

Матрицата на коравина за моделната задача има следната блочна струк-



Фигура 2: Моделна задача в единичния квадрат.

тура:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & & & & \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & A_{i,i-1} & A_{i,i} & A_{i,i+1} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & A_{n,n-1} & A_{n,n} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Тя се записва съкратено във вида

$$A = block\_tridiag(A_{i,i-1}, A_{i,i}, A_{i,i+1}),$$

където $A_{i,i} = tridiag(-1, 4, -1)$ и $A_{i,i-1} = A_{i,i+1} = -I$ са блокове с размерност $n \times n$. Тридиагоналните блокове $A_{i,i}$ съответсват на една вертикална линия от мрежата.

Забележка 2.1 *С точност до умножение с константа, същата матрица се получава, ако за численото решаване на моделната задача е приложен метод на крайните разлики (МКР), където операторът Δu е апроксимиран по 5-точков шаблон кръст. При много по-общи предположения, матриците които се получават по МКЕ и МКР имат аналогична структура и свойства.*

2.2 Свойства на матрицата на коравина.

Лема 2.1 *Матрицата на коравина е симетрична.*

Доказателство. От определението на матрицата на коравина пряко следват равенствата

$$a_{ij} = a(\phi_i, \phi_j), \qquad a_{ji} = a(\phi_j, \phi_i)$$

и следователно

$$a_{ij} = \int_\Omega \sum_{k,l=1}^{2} p_{kl} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_l} d\Omega = \int_\Omega \sum_{k,l=1}^{2} p_{lk} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_l} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_k} d\Omega = a_{ji}$$

с което лемата е доказана. ∎

Лема 2.2 *Матрицата на коравина е положително определена.*

Доказателство. Нека $\mathbf{v} = \{\mathbf{v_i}\}_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \neq \mathbf{0}$ е произволен N-мерен вектор и нека $v_h \in \mathcal{V} \subset H_0^1$ е съответната му в МКЕ на части линейна функция, т.е.

$$v_h = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{v_i} \phi_i$$

Тогава

$$\mathbf{v}^T A \mathbf{v} = (A\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} p_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_i} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} d\Omega.$$

От положителната определеност на коефициентната матрица $[p_{ij}]_{i,j=1}^2$ следва неравенството

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} p_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_i} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} d\Omega \geq C \int_\Omega \left(\left[\frac{\partial v_h}{\partial x_1}\right]^2 + \left[\frac{\partial v_h}{\partial x_2}\right]^2 \right) d\Omega.$$

Тук прилагаме неравенството на Стеклов

$$\int_\Omega \left(\left[\frac{\partial v_h}{\partial x_1}\right]^2 + \left[\frac{\partial v_h}{\partial x_2}\right]^2 \right) d\Omega \geq C \int_\Omega v_h^2 d\Omega,$$

което е в сила за всяка функция от $H_0^1(\Omega)$. Следователно

$$\mathbf{v}^T A \mathbf{v} > 0, \qquad \forall \mathbf{v} \neq \mathbf{0},$$

с което лемата е доказана. ∎

Забележка 2.2 *Тук, както и в други подобни доказателства, означаваме с $C > 0$ обобщена положителна констаната, която не зависи от параметъра на мрежата h или, което е еквивалентно, от размерността на дискретната задача N.*

2.3 Спектрално число на обусловеност.

Дефиниция 2.1 *Число на обусловеност на обратимия оператор A относно нормата $||\cdot||$ наричаме отношението*

$$\kappa(A) = \frac{||A||}{||A^{-1}||}.$$

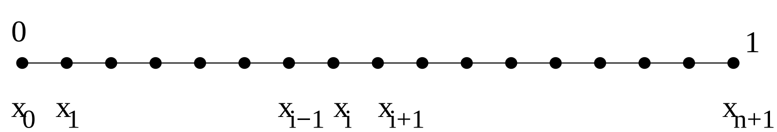
Дефиниция 2.2 *Нека A е симетрична и положително определена матрица. Спектрално число на обусловеност на A наричаме*

$$\kappa(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}},$$

където с λ_{max} и λ_{min} са означени максималното и минимално собствени числа на A.

В настоящия курс ще предполагаме по подразбиране, че числото на обусловеност съответства на спектралната норма на симетричната и положително определена матрица A.

Нека отново разгледаме моделната задача. Тук ще намерим в явен вид собствените числа на матрицата на коравина и ще получим оценка за нейното число на обусловеност.



Фигура 3: Едномерна задача, $h = 1/(n+1)$.

Най-напред ще пресметнем собствените числа и собствените функции на едномерната задача

$$L_{\bar{x}x}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}, \tag{2.4}$$

където с $L_{\bar{x}x}$ е означена триточковата диференчна апроксимация на оператора $L = -u''(x)$ при нулеви гранични условия и равномерна мрежа ω_h със стъпка $h = 1/(n+1)$ (виж Фиг. 3). Спектралната задача (2.4) се записва по-подробно във вида:

$$-\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = \lambda u_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

и гранични условия $u_0 = u_{n+1} = 0$. Следователно

$$u_{i-1} + u_{i+1} = 2(1 - \frac{h^2\lambda}{2})u_i$$

Нека положим u_i във вида $u(x_i) = \sin\alpha x_i$. Прилагаме тригонометричните формули

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha.$$

Така получаваме

$$\sin\alpha(x_i + h) + \sin\alpha(x_i - h) = 2\sin\alpha x_i\cos\alpha h$$

и

$$2\sin\alpha x_i\cos\alpha h = 2(1 - \frac{h^2\lambda}{2})\sin\alpha x_i.$$

Следователно

$$\lambda = \frac{2}{h^2}(1 - \cos\alpha h) = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\alpha h}{2}.$$

От граничното условие $u(1) = \sin\alpha = 0$ намираме n стойности на параметъра $\alpha = k\pi, \quad k = 1, 2, \ldots, n$, на които съответстват n различни собствени числа и собствените вектори

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{k\pi h}{2}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

$$\Phi_k = \{\phi_k^i\}_{i=1}^n = \{\sin k\pi ih\}_{i=1}^n.$$

Нека се върнем към двумерната моделна задача. Непосредствено се проверява, че $\Phi_{kl} = \{\Phi_k(x)\Phi_l(y)\}_{k,l=i}^n$ са собствените функции на матрицата на коравина A. Това следва от равенствата

$$\begin{aligned}\frac{1}{h^2}A\Phi_k(x)\Phi_l(y) &= \Phi_l(y)L_{\bar{x}x}\Phi_k(x) + \Phi_k(x)L_{\bar{y}y}\Phi_l(y) \\ &= \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{k\pi h}{2}\Phi_k(x)\Phi_l(y) + \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{l\pi h}{2}\Phi_k(x)\Phi_l(y).\end{aligned} \tag{2.5}$$

От (2.5) получаваме в явен вид представяне на собствените числа на матрицата A

$$\lambda_{kl} = 4\left(\sin^2\frac{k\pi h}{2} + \sin^2\frac{l\pi h}{2}\right), \qquad k, l = 1, 2, \cdots, n$$

и съответно

$$\lambda_{min} = 8\sin^2\frac{\pi h}{2}, \qquad \lambda max = 8\sin^2\frac{n\pi h}{2}.$$

Следователно

$$\kappa(A) = \left(\frac{\cos^2\frac{\pi h}{2}}{\sin^2\frac{\pi h}{2}}\right) = \frac{4h^{-2}}{\pi^2}\cos^2\frac{\pi h}{2}\left(\frac{\left(\frac{\pi h}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{\pi h}{2}}\right) = O(h^{-2}) = O(N).$$

Забележка 2.3 *Получената оценка*

$$\kappa(A) = O(h^{-2}) = O(N)$$

има фундаметален характер. Тя е в сила при много общи предположения за матриците на коравина, които се получават при дискретизация на елиптични гранични задачи от втори ред по МКЕ или за съответните матрици получени по МКР.