17 Двунивови и многонивови методи. Скорост на сходимост. Изчислителна сложност.

В този въпрос ще ограничим изложението до мултипликативни двунивови и многонивови методи. Разглеждаме елиптичната задача, дискретизирана върху последователност от вложени триъгълни мрежи, заедно с асоциираните с тях крайномерни пространства от на части линейни функции и съответните матрици на коравина в стандартен и йерархичен базис.

17.1 Алгебричен двунивов метод.

Разглеждаме системата

$$A^{(k+1)}\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k+1)}. \tag{17.1}$$

За преобуславяне на матрицата $A^{(k+1)}$,

$$A^{(k+1)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k+1)} & A_{12}^{(k+1)} \\ A_{21}^{(k+1)} & A_{22}^{(k+1)} \end{bmatrix}, \tag{17.2}$$

прилагаме двунивовия преобусловител

$$C^{(k+1)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k+1)} & 0 \\ A_{21}^{(k+1)} & A^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \left(A_{11}^{(k+1)}\right)^{-1} A_{12}^{(k+1)} \\ 0 & I \end{bmatrix}. \tag{17.3}$$

Теорема 17.1 *За числото на обусловеност на алгебричния двунивов преобусловител (17.3) е в сила равномерната оценка*

$$\kappa\left(C^{(k+1)^{-1}}A^{(k+1)}\right) \leq 4. \tag{17.4}$$

Доказателство. Доказателството следва от общата теория на двунивовите методи и равномерната оценка на константата в усиленото неравенства на КБШ за матрицата на коравина, пресметната относно йерархичен двунивов базис. Така получаваме

$$\kappa\left(C^{(k+1)^{-1}}A^{(k+1)}\right) \leq \kappa\left(A^{(k)^{-1}}S^{(k+1)}\right) = \kappa\left(A^{(k)^{-1}}\tilde{S}^{(k+1)}\right) \leq \frac{1}{1-\gamma^2} < \frac{1}{1-3/4},$$

където съществено използваме, че $\tilde{S}^{(k+1)} = S^{(k+1)}$. С това теоремата е доказана. ∎

Доказаната оценка показва, че ако за решаване на системата (17.1) приложим метода на спрегнатия градиент с преобусловител $C^{(k+1)}$, то броят на PCG итерациите ще бъде равномерно ограничен, т.е.

$$\mathcal{N}_{it}^{PCG} = O(1).$$

Основната идея на двунивовите методи е да сведем задачата до подзадачи с редуцирана размерност. Както е известно, решаването на система с преобусловителя $C^{(k+1)}$ се свежда до решаване на две системи с блока $A_{11}^{(k+1)}$ и една система с $A^{(k)}$.

Теорема 17.2 *Числото на обусловеност на $A_{11}^{(k+1)}$ е равномерно ограничено относно размерността на задачата и възможни скокове на коефициентите на елиптичната гранична задача.*

Доказателство. За да докажем, че

$$\kappa \left(A_{11}^{(k+1)} \right) = O(1)$$

отново ще приложим локален анализ. Така

$$\mathbf{u}^T A_{11}^{(k+1)} \mathbf{u} = \sum_{E \in \mathcal{T}_{k+1}} \mathbf{u_E}^T A_{11;E}^{(k+1)} \mathbf{u_E} \le \sum_{E \in \mathcal{T}_{k+1}} \lambda_3 (A_{11;E}^{(k+1)}) \mathbf{u_E}^T \mathbf{u_E}$$

Следователно

$$\mathbf{u}^T A_{11}^{(k+1)} \mathbf{u} < C_{ev} \max_{E \in \mathcal{T}_{k+1}} \lambda_3 (A_{11;E}^{(k+1)}) \mathbf{u}^T \mathbf{u},$$

където C_{ev} е максималният брой елементи, в които може да се случи да участва възел от $\mathcal{T}_{k+1}$. Следователно $C_{ev} > 0$ е константа, зависеща само от топологията на началната триангулация $\mathcal{T}_1$. По напълно аналогичен начин се доказва оценка отдолу, т.е.

$$\mathbf{u}^T A_{11}^{(k+1)} \mathbf{u} > \min_{E \in \mathcal{T}_{k+1}} \lambda_1 (A_{11;E}^{(k+1)}) \mathbf{u}^T \mathbf{u}.$$

Като използваме, че екстремалните стойности на отношението на Релей са съответно равни на минималната и максимална собствена стойност, получаваме оценката

$$\kappa\left(A_{11}^{(k+1)}\right) = C_{ev}\frac{\max\limits_{E\in\mathcal{T}_{k+1}} \lambda_3(A_{11;E}^{(k+1)})}{\min\limits_{E\in\mathcal{T}_{k+1}} \lambda_1(A_{11;E}^{(k+1)})}.$$

с което теоремата е доказана. ■

Съществено за приведеното доказателство е, че макроелементните матрици $A_{11;E}^{(k+1)}$ са положително определени. Това е така, защото те съответстват на дискретизация на изходната елиптична гранична задача върху макроелемента E, при което във върховете на триъгълника са наложени хомогенни гранични условия на Дирихле.

От (17.4) следва, че методът на спрегнатия градиент има оптимална изчислителна сложност при решаване на системи с $A_{11}^{(k+1)}$. Следователно двунивовият мултипликативен преобусловител свежда задачата до решаване на системи с матрицата $A^{(k)}$, която е с приблизително 4 пъти по-малка размерност от изходната.

Забележка 17.1 *При реализация на мултипликативния двунивов метод, дефиниран с помощта на (17.3), се работи само с матриците на коравина, пресметнати относно стандартния Лагранжев базис. Двунивовият йерархичен базис се използва само като елемент на доказателството. Това е съществено предимство на мултипликативния метод (което не е в сила при адитивния), защото матриците на коравина относно двунивовия базис имат по-малко разредена структура.*

Пример. Нека разгледаме отново моделна задача, съответсваща на билинейната форма

$$a(u,v) = \int_\Omega p(T)\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\,\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\,\frac{\partial v}{\partial x_2}\right) d\Omega,$$

където Ω е правоъгълен полигон и $\mathcal{T}_1$ е равномерна триангулация, която се състои от равнобедрени правоъгълни триъгълници, с катети успоредни на координатните оси. Нека също така коефициентът $p(x_1,x_2) = p(T)$ е константа върху всеки от елементите $T \in \mathcal{T}_1$. При тези предположения локалната оценка на числото на обусловеност на $A_{11}^{(k+1)}$ се пресмята относно една макроелементна матрица на коравина, която има вида

$$A_{11;E}^{(k+1)} = \frac{p(e)}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Така, с помощта на елементарни пресмятания получаваме

$$\lambda_1(A_{11;E}^{(k+1)}) = \frac{p(e)}{2}(2-\sqrt{2}), \qquad \lambda_3(A_{11;E}^{(k+1)}) = \frac{p(e)}{2}(2+\sqrt{2}).$$

Тъй като при равномерна мрежа $C_{ev} \le 6$, то от намерените минимално и максимално собствени числа за локалната матрица, получаваме оценката

$$\kappa\left(A_{11}^{(k+1)}\right) < 6(3+2\sqrt{2}).$$

17.2 Алгебричен многонивов метод. Оптимален $AMLI$ алгоритъм.

Алгебричният многонивов метод от тип $AMLI$ е обобщение на двунивовия метод. За целта се прилага следната рекурсивна конструкция:

$C^{(1)} = A^{(1)};$

за $k = 1, 2, \ldots, \ell - 1$

$$C^{(k+1)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k+1)} & 0 \\ A_{21}^{(k+1)} & \tilde{A}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A_{11}^{(k+1)^{-1}} A_{12}^{(k+1)} \\ 0 & I \end{bmatrix}, \qquad (17.5)$$

където

$$\tilde{A}^{(k)^{-1}} = \left[I - p_\beta\left(C^{(k)^{-1}} A^{(k)}\right)\right] A^{(k)^{-1}}.$$

Тук $p_\beta(t)$ е полином от степен β, такъв че $p_\beta(0) = 1$ и $0 \le p_\beta(t) < 1$ за $t \in (0, 1]$. Нека

$$p_\beta(t) = \frac{1 + T_\beta\left(\dfrac{1+\alpha-2t}{1-\alpha}\right)}{1 + T_\beta\left(\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)},$$

където $\alpha \in (0,1)$ е подходящо избран параметър, а T_β е полиномът на Чебишев от степен β.

Основен резултат в теорията на $AMLI$ методите е следващата теорема.

Теорема 17.3 *Ако за степента на скалирания и изместен полином на Чебишев е в сила неравенството*

$$\beta^2 > \frac{1}{1-\gamma^2},$$

то съществува $\alpha \in (0,1)$, такова че $AMLI$ преобусловителят $C = C^{(\ell)}$ и матрицата на коравина $A = A^{(\ell)}$ са спектрално еквивалентни, т.е. относителното число на обусловеност $\kappa\,(C^{-1}A)$ е ограничено от константа, която не зависи от броя на неизвестните N.

Тъй като $\gamma^2 < \dfrac{3}{4}$, то непосредствено следствие от структурата на преобуславящата матрица C и от горната теорема е, че $AMLI$ алгоритъмът има оптимална изчислителна сложност относно броя на неизвестните N. По-точно, за достигане на относителна точност $\epsilon > 0$ в метода на спрегнатия градиент с преобуславяне са достатъчни $O(N \log \dfrac{1}{\epsilon})$ аритметични операции.

Забележка 17.2 *Тук е важно да отбележим, че константата в оценката $O(N \log \dfrac{1}{\epsilon})$ зависи от числото на обусловеност на диагоналните блокове $A_{11}^{(k+1)}$. Реализацията на метода на спрегнатия градиент с дефинирания чрез (17.5) преобусловител $C^{(k+1)}$ включва на всяка итерация решаване на системи с блоковете $A_{11}^{(k+1)}, \;\; k = 1, \ldots, \ell-1$. Както доказахме, числото на обусловеност $\kappa\left(A_{11}^{(k+1)}\right)$ е равномерно ограничено относно броя на неизвестните N_k на k-тото ниво на сгъстяване на мрежата. Това свойство е в основата на оптималността на алгоритъма, когато изходната задача е изотропна. Ситуацията обаче съществено се променя, когато задачата е анизотропна. По тази причина, за задачи със силна анизотропия се използва вариант на $AMLI$ алгоритъм с подходящо преобусловени блокове $A_{11}^{(k+1)}$.*