16 Двунивови методи. Локални оценки. Скорост на сходимост.

16.1 Двунивов базис и двунивово разделяне.

Разглеждаме елиптична гранична задача във вариационната формулировка, както следва: за дадена дясна част $f \in L^2(\Omega)$ търсим $u \in H_0^1(\Omega)$, такова че

$$a(u,v) = \int_\Omega f v d\Omega, \quad \text{за всяко} \;\; v \in H_0^1(\Omega),$$

където

$$a(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} p_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, \frac{\partial v}{\partial x_j} d\Omega, \quad u,v \in H_0^1(\Omega).$$

Тук матрицата от коефициентите $[a_{ij}]$ е симетрична и положително определена. Прилагаме МКЕ и получаваме дискретната задача: търсим $u_h \in V \subset H_0^1(\Omega)$, такова че

$$a(u_h, v_h) = \sum_{e \in T} a_e(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \text{за всяко} \;\; v_h \in V, \tag{16.1}$$

където

$$a_e(u_h, v_h) = \int_e \sum_{i,j=1}^{2} p_{ij}(e) \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \, \frac{\partial v_h}{\partial x_j} de.$$

Нека означим с $\mathcal{T}_1$ една начална триангулация на Ω, която описва геометрията на областта. Ще предполагаме, че коефициентите на граничната задача са константи във всеки от елементите от $\mathcal{T}_1$. Нека означим с $V_1 \subset H_0^1(\Omega)$ множеството от на части линейните функции, относно триангулацията $\mathcal{T}_1$. На крайномерното пространство V_1 съответства системата от линейни алгебрични уравнения

$$A^{(1)} \mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{f}^{(1)}.$$

За да намерим числено решение с достатъчна точност прилагаме сгъстяване на мрежата. Така получаваме триангулациите $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{T}_\ell$. Тук $\mathcal{T}_{k+1}$ се получава посредством добавяне на средните отсечки във всеки елемент $e \in \mathcal{T}_k$. Следователно всеки триъгълник от по-грубата мрежа се разделя на четири еднакви триъгълника от по-фината мрежа, които са подобни на изходния (виж Фиг. 2). С триангулациите $\{\mathcal{T}_k\}_{k=1}^{\ell}$ са асоциирани крайноелементните пространства $V_1 \subset V_2 \subset \ldots V_\ell$ и съответните матрици на коравина $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(\ell)}$. Матриците на коравина $A^{(k)}$ са пресметнати относно стандартния Лагранжев възлов базис. Нашата крайна цел е да решим системата върху най-фината мрежа, т.е.

$$A^{(\ell)}\mathbf{u}^{(\ell)} = \mathbf{f}^{(\ell)}.$$

Тук ще концентрираме своето внимание върху $(k+1)$-вото ниво. Нека разгледаме разделяне на възлите $\mathbf{N}^{(k+1)}$ от $\mathcal{T}_{k+1}$ на две подмножества: $\mathbf{N}^{(k+1)} \setminus \mathbf{N}^{(k)}$ и $\mathbf{N}^{(k)}$. Записваме матрицата $A^{(k+1)}$ в блочен вид

$$A^{(k+1)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k+1)} & A_{12}^{(k+1)} \\ A_{21}^{(k+1)} & A_{22}^{(k+1)} \end{bmatrix}, \tag{16.2}$$

където първият диагонален блок $A_{11}^{(k+1)}$ съответсва на възлите от $\mathbf{N}^{(k+1)} \setminus \mathbf{N}^{(k)}$, а вторият диагонален блок $A_{22}^{(k+1)}$ на останалите, т.е. на възлите от $\mathbf{N}^{(k)}$.

Нека означим с $\Phi^{(k+1)} = \{\phi_i^{(k+1)}\}_{i=1}^{N^{(k+1)}}$ стандартния възлов базис за V_{k+1}. Йерархичният двунивов базис се дефинира, както следва:

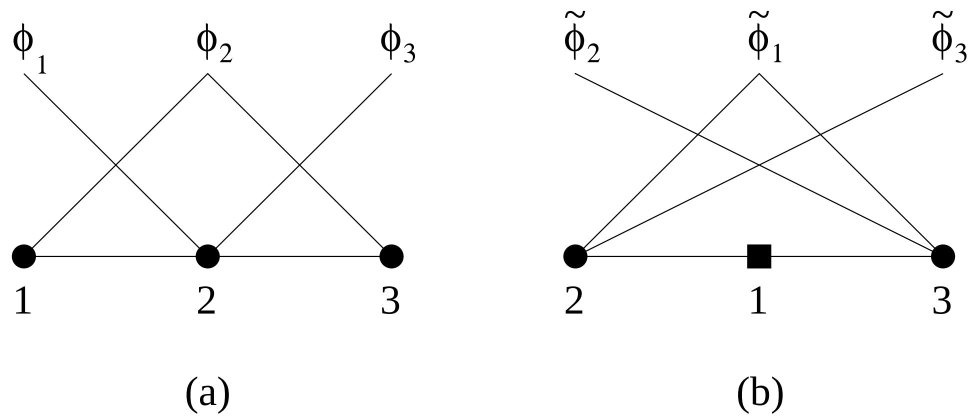
$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}^{(k+1)} &= \{\tilde{\phi}_i^{(k+1)}\}_{i=1}^{N^{(k+1)}} \\ &= \{\phi_r^{(k+1)},\, r \text{ съответстват на } \mathbf{N}^{(k+1)} \setminus \mathbf{N}^{(k)}\} \cup \{\phi_i^{(k)}\}_{i=1}^{N^{(k)}} \end{aligned}$$

С други думи, базисните функции от първия блок, съответсващи на възлите от $\mathbf{N}^{(k+1)} \setminus \mathbf{N}^{(k)}$ остават непроменени, а вторият блок е базисът $\Phi^{(k)}$, съответстващ на по-грубата триангулация $\mathcal{T}_k$. На Фиг. 1 е показан стандартен (a) и двунивов (b) базис за един макроелемент в едномерния случай при линейни крайни елементи.

Така дефинираният двунивов базис се пресмята по формулата

$$\tilde{\Phi}^{(k+1)} = J^{(k+1)}\Phi^{(k+1)}, \qquad J^{(k+1)} = \begin{bmatrix} I & \\ J_{21}^{(k+1)} & I \end{bmatrix}.$$

Тук матрицата $J_{21}^{(k+1)}$ е силно разредена (проверете нейния явен вид за едномерната задача), а както навсякъде в изложението, I е единичната матрица със съгласувана с останалите блокове (матрици) размерност.



Фигура 1: (a) стандартен базис; (b) двунивов базис.

Матрицата на коравина, пресметната относно двунивовия базис означаваме с $\tilde{A}^{(k+1)}$:

$$\tilde{A}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11}^{(k+1)} & \tilde{A}_{12}^{(k+1)} \\ \tilde{A}_{21}^{(k+1)} & \tilde{A}_{22}^{(k+1)} \end{bmatrix}. \tag{16.3}$$

Теорема 16.1 *В сила са следните зависимости между матриците на коравина, пресметнати относно стандартен и двунивов базис:*

(a)

$$\tilde{A}_{11}^{(k+1)} = A_{11}^{(k+1)}, \qquad \tilde{A}_{22}^{(k+1)} = A^{(k)};$$

(b) *Допълнението на Шур не се променя при преход от стандартен към йерархичен базис.*

Доказателство. Твърдение (a) на теоремата следва непосредствено от дефиницията на двунивовия базис. За да докажем (b) ще използваме формулата за смяна на базиса. В разглеждания случай тя се записва във вида:

$$\tilde{A}^{(k+1)} = J^{(k+1)} A^{(k+1)} {J^{(k+1)}}^T.$$

Следователно

$$\tilde{A}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k+1)} & A_{11}^{(k+1)} J_{12}^{(k+1)} + A_{12}^{(k+1)} \\ J_{21}^{(k+1)} A_{11}^{(k+1)} + A_{21}^{(k+1)} & \begin{array}{l} J_{21}^{(k+1)} A_{11}^{(k+1)} J_{12}^{(k+1)} + J_{21}^{(k+1)} A_{12}^{(k+1)} \\ +A_{21}^{(k+1)} J_{12}^{(k+1)} + A_{22}^{(k+1)} \end{array} \end{bmatrix},$$

където $J_{12}^{(k+1)} = J_{21}^{(k+1)^T}$. От последното равенство получаваме, че

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^{(k+1)} &= J_{21}^{(k+1)} A_{11}^{(k+1)} J_{12}^{(k+1)} + J_{21}^{(k+1)} A_{12}^{(k+1)} + A_{21}^{(k+1)} J_{12}^{(k+1)} + A_{22}^{(k+1)} \\
&\quad -(J_{21}^{(k+1)} A_{11}^{(k+1)} + A_{21}^{(k+1)}) A_{11}^{(k+1)^{-1}} (A_{11}^{(k+1)} J_{12}^{(k+1)} + A_{12}^{(k+1)}) \\
&= A_{22}^{(k+1)} - A_{21}^{(k+1)} A_{11}^{(k+1)^{-1}} A_{12}^{(k+1)} \\
&= S^{(k+1)}.
\end{aligned}$$

С това теоремата е доказана. ■

От условие (a) на теоремата следва представянето:

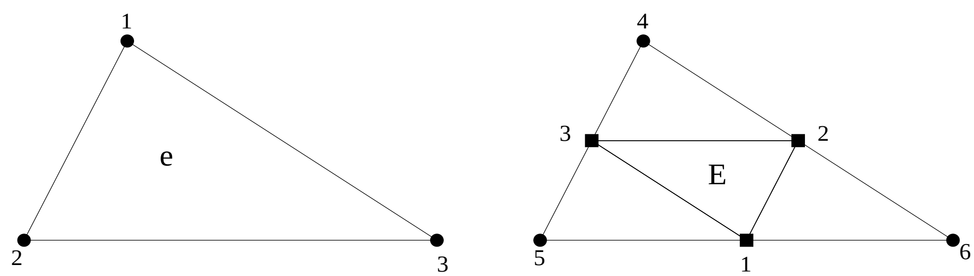
$$\tilde{A}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k+1)} & \tilde{A}_{12}^{(k+1)} \\ \tilde{A}_{21}^{(k+1)} & A^{(k)} \end{bmatrix}. \tag{16.4}$$

Матриците на коравина $A^{(k+1)}$ и $\tilde{A}^{(k+1)}$ могат да се асемблират от макроелементните матрици на коравина относно триъгълниците $E \in \mathcal{T}_{k+1}$ получени при разделяне на 4 нови триъгълника на $e \in \mathcal{T}_k$. Те имат аналогична 2×2 блочна структура и свойства, т.е.:

$$A_E^{(k+1)} = \begin{bmatrix} A_{11;E}^{(k+1)} & A_{12;E}^{(k+1)} \\ A_{21;E}^{(k+1)} & A_{22;E}^{(k+1)} \end{bmatrix}, \tag{16.5}$$

$$\tilde{A}_E^{(k+1)} = \begin{bmatrix} A_{11;E}^{(k+1)} & \tilde{A}_{12;E}^{(k+1)} \\ \tilde{A}_{21;E}^{(k+1)} & A_e^{(k)} \end{bmatrix}. \tag{16.6}$$

Тук всеки от блоковете е с размерност 3×3, като можем да си мислим, че номерацията съответства на Фиг. 2.



Фигура 2: Равномерно сгъстяване на мрежата. Номерация на възлите в макроелемент.

16.2 Локална оценка на константата в усиленото неравенство на КБШ.

Нека пространствата W_1 и W_2 съответстват на двунивовото блочно представяне на матрицата на коравина, пресметната относно йерархичния двунивов базис. Нека означим с W_1^h и W_2^h пространствата от крайноелементни функции, съответстващи на векторите от W_1 и W_2. За константата в усиленото неравенство на КБШ е в сила еквивалентното представяне

$$\gamma^2 = \sup_{v_i^h \in W_i^h, \quad i=1,2} \frac{[a(v_1^h, v_2^h)]^2}{a(v_1^h, v_1^h)\ a(v_2^h, v_2^h)}.$$

Тук сме отчели, че матрицата на коравина на елиптичната задача е положително определена. На макроелементните матрици на коравина съответстват локални константи γ_E в усиленото неравенство на КБШ, за които е в сила равенството

$$\gamma_E^2 = \sup_{v_i^h \in W_i^h,\ v_2^h{}_{|E} \neq const} \frac{[a_E(v_1^h, v_2^h)]^2}{a_E(v_1^h, v_1^h)\ a_E(v_2^h, v_2^h)},$$

където

$$a_E(u, v) = \int_E \sum_{i,j=1}^{2} p_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\ \frac{\partial v}{\partial x_j} dE.$$

Тук е важно да отбележим, че макроелементната матрица на коравина е в общия случай положително полуопределена, като ядрото се състои от константите. В стандартен възлов базис на константна функция съответства константен вектор от възлови параметри. Очевидно за двунивовото разделяне относно двунивовия базис е в сила условието, че ако $\begin{bmatrix} \mathbf{v_1} \\ \mathbf{v_2} \end{bmatrix} \in \mathcal{N}(\tilde{A}_E^{(k+1)})$, то $\mathbf{v_2}$ принадлежи на ядрото

$$\mathcal{N}(\tilde{A}_{E;22}^{(k+1)}) = \mathcal{N}(A_e^{(k)}).$$

Фундаментално значение за двунивовите методи за преобуславяне има следващата теорема.

Теорема 16.2 *Глобалната константа в усиленото неравенство на КБШ, съответстваща на двунивово разделяне на матрицата на коравина, пресметната относно йерархичен двунивов базис се оценява с помощта на локалните константи, като е в сила неравенството*

$$\gamma \le \max_{E \in \mathcal{T}_{k+1}} \gamma_E .$$

Доказателство.

$$\begin{aligned}
|a(v_1, v_2)| &\le \sum_{E \in \mathcal{T}_{k+1}} |a_E(v_1, v_2)| \\
&\le \sum_{E \in \mathcal{T}_{k+1}} \gamma_E \sqrt{a_E(v_1, v_1)} \sqrt{a_E(v_2, v_2)} \\
&\le \max_{E \in \mathcal{T}_{k+1}} \gamma_E \sum_{E \in \mathcal{T}_{k+1}} \sqrt{a_E(v_1, v_1)} \sqrt{a_E(v_2, v_2)} \\
&\le \max_{E \in \mathcal{T}_{k+1}} \gamma_E \sqrt{\sum_{E \in \mathcal{T}_{k+1}} a_E(v_1, v_1)} \sqrt{\sum_{E \in \mathcal{T}_{k+1}} a_E(v_2, v_2)} \\
&\le \max_{E \in \mathcal{T}_{k+1}} \gamma_E \sqrt{a(v_1, v_1)} \sqrt{a(v_2, v_2)},
\end{aligned}$$

с което теоремата е доказана. ■

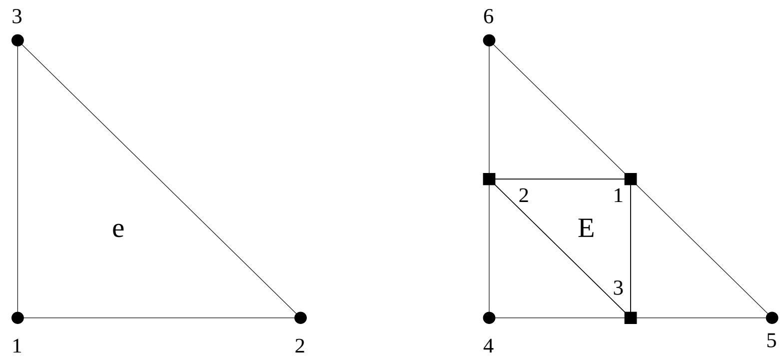
Важно е да отбележим, че локалните константи γ_E не зависят от нивото на сгъстяване на мрежата, а само от характеристиките относно началната триангулация. Това е така, защото коефициентите на задачата са константи върху всеки елемент от $\mathcal{T}_1$, а елементите от следващите $\mathcal{T}_k$ са подобни на триъгълниците от $\mathcal{T}_1$.

В заключение ще покажем, как на практика могат да бъдат пресметнати локалните константи γ_E. Тъй като константата в усиленото неравенство на КБШ е минималната възможна, за която е в сила неравенството

$$1 - \gamma_E^2 \le \frac{\mathbf{v_2^T} \tilde{S}_E \mathbf{v_2}}{\mathbf{v_2}^T A_e \mathbf{v_2}}, \tag{16.7}$$

то $(1 - \gamma_E^2)$ е минималното собствено число на обобщената спектрална задача

$$\tilde{S}_E \mathbf{v_2} = \mu A_e \mathbf{v_2}, \qquad \mathbf{v_2^T} \ne (1, 1, 1). \tag{16.8}$$



Фигура 3: Моделна задача върху равномерна правоъгълна мрежа.

Тук не записваме горните индекси, тъй като задачата на зависи от нивото на сгъстяване.

Пример. Нека разгледаме моделна задача, съответсваща на билинейната форма

$$a(u,v) = \int_\Omega p(T) \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) d\Omega.$$

Нека Ω е правоъгълен полигон, и нека $\mathcal{T}_1$ е равномерна триангулация, която се състои от равнобедрени правоъгълни триъгълници, с катети успоредни на координатните оси. Както и в общия случай, предполагаме че коефициентът $p(x_1, x_2) = p(T)$ е константа върху всеки от елементите $T \in \mathcal{T}_1$. При тези предположения локалната константа в усиленото неравенство на КБШ е единствена и се пресмята относно макроелементна и елементна матрици на коравина (виж Фиг. 3), които имат следния явен вид.

$$A_e = \frac{p(e)}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_E = \frac{p(e)}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{S}_E = \frac{p(e)}{16} \begin{bmatrix} 8 & -4 & -4 \\ -4 & 5 & -1 \\ -4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Така, разглежданата задача (16.8) се свежда до уравнението

$$\begin{vmatrix} 5-8\mu & -1 \\ -1 & 5-8\mu \end{vmatrix} = 0.$$

Следователно $1-\gamma_E^2=\mu_1=1/2$, т.е. $\gamma_E^2=1/2$, т.е.

$$\gamma^2 \le \frac{1}{2}.$$

В общия случай е в сила следната теорема.

Теорема 16.3 *При най-общи предположения за триъгълниците от началната мрежа $\mathcal{T}_1$ и за коефициентната матрица $[p_{ij}]$ е в сила оценката*

$$\gamma^2 \le \frac{3}{4}. \tag{16.9}$$

Забележка 16.1 *Оценката (16.9) е равномерна, както относно размерността на дискретната задача (броя на нивата на сгъстяване на мрежата) и възможни скокове на коефициентите $[p_{ij}]$, така и относно произволна мрежова или коефициентна анизотропия.*

Забележка 16.2 *В разгледания пример редуцираме обобщената спектрална задача от 3×3 до 2×2, като отчитаме, че тривиалното решение, съответстващо на константен собствен вектор се изключва.*