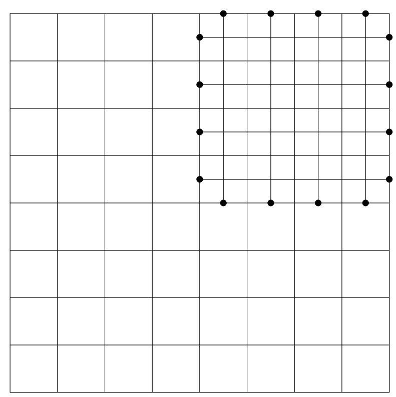
14 Локално сгъстяване. BEPS алгоритъм.

14.1 Формулировка на метода.

Нека разгледаме моделната елиптична гранична задача от втори ред в единичния квадрат $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ и нека в регулярна подобласт мрежата е локално сгъстена, както е показано на Фиг. 1. Методът, който ще разгледаме се обобщава за произволна правоъгълна област Ω и елиптичен оператор, допускащ разделяне на променливите, както и произволна правоъгълна подобласт, където прилагаме локално сгъстяване. Методът, както и алгоритъмът за неговата ефективна реализация е известен със съкращението BEPS (Bramble, Ewing, Pasciak, Schatz).



Фигура 1: Съставна мрежа с локално сгъстяване.

Ще използваме следните означения:

- $\tilde{\omega}$ - възлите от началната (груба) мрежа;
  $\tilde{A}$ - матрица на коравина, съответстваща на началната мрежа;

- ω - възлите от съставната мрежа с локално сгъстяване;
  A - матрица на коравина, съответстваща на съставната мрежа;

- с черни кръгчета са означени т.н. подчинени възли; на тези възли не съответстват неизвестни, а стойността на приближеното решение се приема за средно аритметично от стойностите в съседните възли по интерфейса от началната мрежа $\tilde{\omega}$.

Целта е да решим системата върху съставната мрежа, т.е.

$$A\mathbf{u} = \mathbf{f}.$$

С $\Omega_1 \subset \Omega$ означаваме подобластта с локално сгъстяване и нека

$$\omega = \omega_1 \cup \omega_2,$$

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_1 \cup \tilde{\omega}_2.$$

Тук ω_1 и $\tilde{\omega}_1$ са подмножествата на ω и $\tilde{\omega}$ съдържащи възлите от подобластта с локално сгъстяване Ω_1. В съответствие с въведеното разделяне записваме в блочен 2×2 вид матриците на коравина A и $\tilde{A}$:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}\ \omega_1 \\ \}\ \omega_2 = \omega/\omega_1 \end{array}$$

и

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{1,1} & \tilde{A}_{1,2} \\ \tilde{A}_{2,1} & \tilde{A}_{2,2} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}\ \tilde{\omega}_1 \\ \}\ \tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}/\tilde{\omega}_1 \end{array} .$$

При тези предположения, BEPS преобусловителят се дефинира с равенството

$$C_{BEPS} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 \\ A_{2,1} & \tilde{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A_{1,1}^{-1} A_{1,2} \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

където

$$\tilde{S} = \tilde{A}_{2,2} - \tilde{A}_{2,1} \tilde{A}_{1,1}^{-1} \tilde{A}_{1,2}.$$

Теорема 14.1 *BEPS преобусловителят има оптимално число на обусловеност, т.е.*

$$\kappa(C_{BEPS}^{-1} A) = O(1).$$

14.2 Алгоритмична реализация.

Отново ще анализираме изчислителната сложност на решаване на система с преобуславящата матрица C_{BEPS}. От дефиницията във факторизиран вид получаваме

$$\mathcal{N}(C_{BEPS}^{-1}\mathbf{v}) = 2\mathcal{N}(A_{1,1}^{-1}\mathbf{v}) + (\tilde{S}^{-1}\mathbf{v}) + O(N^{1/2}).$$

1. Решаването на система с матрицата $A_{1,1}$ съответства на решаване на изходната задача с разделящи се променливи в подобластта ω_1 с локално сгъстена мрежа. Предполагаме, че за целта прилагаме почти оптимален метод с използване на БПФ, т.е.

$$\mathcal{N}(A_{1,1}^{-1}\mathbf{v}) = O(N \log N).$$

2. Оказва се, че решаването на система с допълнението на Шур $\tilde{S}$ се свежда до решаване на система със специално избрана дясна част за матрицата $\tilde{A}$. С други думи, това отново е задача с разделящи се променливи в правоъгълна област с регулярна мрежа. Искаме да решим система от вида

$$\tilde{S}\mathbf{x_2} = \mathbf{b_2}.$$

Ще покажем, че за целта е достатъчно да решим системата

$$\tilde{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b_2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \end{bmatrix}.$$

Твърдението се проверява непосредствено. Системата

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{1,1} & 0 \\ \tilde{A}_{2,1} & \tilde{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \tilde{A}_{1,1}^{-1}\tilde{A}_{1,2} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b_2} \end{bmatrix}$$

решаваме на две стъпки. Първата (прав ход) се редуцира до

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{1,1} & 0 \\ \tilde{A}_{2,1} & \tilde{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y_1} \\ \mathbf{y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b_2} \end{bmatrix}$$

и следователно

$$\begin{array}{lll} \tilde{A}_{1,1}\mathbf{y_1} = 0 & \rightarrow & \mathbf{y_1} = 0 \\ \tilde{A}_{2,1}\mathbf{y_1} + \tilde{S}\mathbf{y_2} = \mathbf{b_2} & \rightarrow & \mathbf{y_2} = \tilde{S}^{-1}\mathbf{b_2} \end{array}.$$

Втората стъпка (обратен ход) има вида

$$\begin{bmatrix} I & \tilde{A}_{1,1}^{-1}\tilde{A}_{1,2} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y_1} \\ \mathbf{y_2} \end{bmatrix}$$

и следователно

$$\mathbf{x_2} = \mathbf{y_2} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x_2} = \tilde{S}^{-1}\mathbf{b_2}$$

с което твърдението е доказано. Отново предполагаме, че за решаване на системата с матрица $\tilde{A}$ използваме метод на разделяне на променливите с БПФ, т.е.

$$\mathcal{N}(\tilde{S}^{-1}\mathbf{v}) = O(N \log N).$$

Като вземем предвид оценките за числото на обусловеност и изчислителната сложност на решаване на системи с преобуславящата матрица C_{BEPS}, получаваме следващата теорема.

Теорема 14.2 *Методът на спрегнатия градиент с BEPS преобусловител има почти оптимална изчислителна сложност, т.е.*

$$\mathcal{N}_{BEPS}^{PCG} = O(N \log N).$$

Забележка 14.1 *Алгоритми за локално сгъстяване от тип BEPS са разработени най-напред във връзка с моделиране на сложни течения в порести среди. Този клас задачи са свързани с приложения в екологията на подпочвените води, както и със задачи от областта на проучване на петролни полета и управление на добива от тях.*