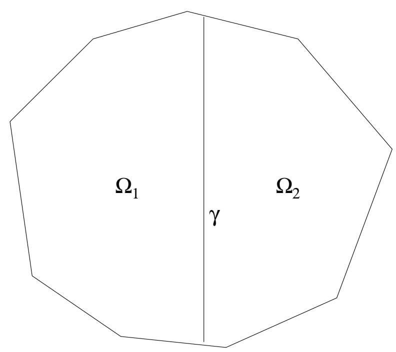
13 Методи използващи разделяне на областта на подобласти.

13.1 Формулировка на DD метода.

Методите за преобуславяне, използващи разделяне на областта на подобласти са известни в литературата като DD (Domain Decomposition) методи. Нека разгледаме елиптична гранична задача с гранични условия на Дирихле в областта Ω, която е разделена без припокриване на две подобласти Ω_1 и Ω_2. Вътрешната граница (интерфейс) означаваме с γ (виж Фиг. 1). За численото решаване на задачата прилагаме линейни триъгълни крайни



Фигура 1: Разделяне на областта на подобласти без припокриване.

елементи, като с Ω^h означаваме множеството от възлите на мрежата от вътрешността на Ω. Ще предполагаме, че мрежата е съгласувана с вътрешната граница, т.е. γ не пресича триъгълници от мрежата. Нека означим с $\Omega_i^h \subset \Omega_i$ множеството от възлите на мрежата от вътрешността на Ω_i, $i = 1, 2$. С γ^h означаваме множеството от възлите на мрежата от вътрешността на Ω лежащи върху γ. Следователно

$$\Omega^h = \Omega_1^h \cup \Omega_2^h \cup \gamma^h.$$

Записваме матрицата на коравина в блочен вид

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & & A_{1,3} \\ & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix},$$

където блоковете $A_{i,i}$, $i = 1, 2$ съответстват на гранична задача на Дирихле в подобластите Ω_i. Нека приложим блочна 2×2 факторизация на A, както следва

$$A = \begin{bmatrix} C_D & C_{D\gamma} \\ C_{\gamma D} & C_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_D & \\ C_{\gamma D} & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & C_D^{-1} C_{D\gamma} \\ & I \end{bmatrix},$$

където

$$C_D = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \\ & A_{2,2} \end{bmatrix}, \qquad C_{D\gamma} = \begin{bmatrix} A_{1,3} \\ A_{2,3} \end{bmatrix},$$

$$S = C_\gamma - C_{\gamma D} C_D^{-1} C_{D\gamma}$$

и съответно

$$C_D^{-1} C_{D\gamma} = \begin{bmatrix} A_{1,1}^{-1} & \\ & A_{2,2}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1,3} \\ A_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1}^{-1} A_{1,3} \\ A_{2,2}^{-1} A_{2,3} \end{bmatrix}$$

Нека означим с Λ симетричната и положително определена матрица, съответстваща на апроксимация на минус втора производна по интерфейса γ^h и хомогенни гранични условия на Дирихле. Ако γ е отсечка и мрежата върху нея е равномерна със стъпка h, то

$$\Lambda = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

При тези предположения, дефинираме преобусловител по метода на разделяне на областта на подобласти с равенството

$$C_{DD} = \begin{bmatrix} C_D & \\ C_{\gamma D} & \Lambda^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & C_D^{-1} C_{D\gamma} \\ & I \end{bmatrix}.$$

Лема 13.1 *В сила е оценката*

$$\kappa(\Lambda^{-1/2} S) = O(1).$$

При доказателството на лемата се използват резултати от теория на елиптичните оператори.

Теорема 13.1 *Преобусловителят C_{DD} има оптимално относително число на обусловеност, т.е.*

$$\kappa(C_{DD}^{-1}A) = O(1).$$

Доказателство. Нека запишем матриците A и C_{DD} в симетризиран факторизиран вид:

$$A = \begin{bmatrix} I & \\ C_{\gamma D}C_D^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_D & \\ & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & C_D^{-1}C_{D\gamma} \\ & I \end{bmatrix} = LDL^T,$$

$$C_{DD} = \begin{bmatrix} I & \\ C_{\gamma D}C_D^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_D & \\ & \Lambda^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & C_D^{-1}C_{D\gamma} \\ & I \end{bmatrix} = L\tilde{D}L^T.$$

Като използваме екстремалните свойства на отношението на Релей получаваме:

$$\begin{array}{rclcl} \lambda_{max}(C_{DD}^{-1}A) & = & \max\limits_{\mathbf{u}} \dfrac{(A\mathbf{u},\mathbf{u})}{(C_{DD}\mathbf{u},\mathbf{u})} & = & \max\limits_{\mathbf{u}} \dfrac{(LDL^T\mathbf{u},\mathbf{u})}{(L\tilde{D}L^T\mathbf{u},\mathbf{u})} \\ & = & \max\limits_{\mathbf{u}} \dfrac{(DL^T\mathbf{u},L^T\mathbf{u})}{(\tilde{D}L^T\mathbf{u},L^T\mathbf{u})} & = & \max\limits_{\mathbf{v}} \dfrac{(D\mathbf{v},\mathbf{v})}{(\tilde{D}\mathbf{v},\mathbf{v})} \\ & = & \lambda_{max}(\Lambda^{-1/2}S) & & \end{array}.$$

и напълно аналогично

$$\lambda_{min}(C_{DD}^{-1}A) = \lambda_{min}(\Lambda^{-1/2}S).$$

Следователно

$$\kappa(C_{DD}^{-1}A) = \kappa(\Lambda^{-1/2}S).$$

Тук прилагаме оценката от лемата, с което теоремата е доказана.

■

13.2 Изчислителни аспекти.

От доказаната теорема следва, че DD методът има оптимална скорост на сходимост, т.е.

$$n_{DD}^{it} = O(1).$$

За изчислителната сложност на една PCG итерация с DD преобусловител е в сила оценката

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{DD}^{it} &\approx \mathcal{N}(\mathbf{C}_{DD}^{-1}\mathbf{v}) + \mathcal{N}(A\mathbf{v}) + 10N \\
&= \mathcal{N}(\mathbf{C}_{DD}^{-1}\mathbf{v}) + O(N) \\
&= 2\mathcal{N}(A_{1,1}^{-1}\mathbf{v_1}) + 2\mathcal{N}(A_{2,2}^{-1}\mathbf{v_2}) + \mathcal{N}(\Lambda^{-1/2}\mathbf{v_3}) + O(N).
\end{aligned}$$

Тук ще разгледаме един бърз алгоритом за решаване на системи с матрицата $\Lambda^{1/2}$. Нека си припомним, че е в сила представянето

$$\Lambda = WDW^T,$$

където с W и D са означени матриците от собствените вектори (по стълбове) и собствените стойности (по диагонала) на Λ.

Лема 13.2

$$\Lambda^{1/2} = WD^{1/2}W^T,$$

$$\Lambda^{-1/2} = WD^{-1/2}W^T,$$

където $D^{1/2} = diag(\lambda_i^{1/2})$.

Доказателство.

$$\Lambda^{1/2}\Lambda^{1/2} = WD^{1/2}W^TWD^{1/2}W^T = WD^{1/2}D^{1/2}W^T = WDW^T = \Lambda$$

$$\Lambda^{-1/2}\Lambda^{1/2} = WD^{-1/2}W^TWD^{1/2}W^T = WD^{-1/2}D^{1/2}W^T = WW^T = I.$$

■

В заключение нека си припомним, че умножението с матрици W и W^T може да се изпълни с помощта на БПФ и тогава

$$\mathcal{N}(\Lambda^{-1/2}\mathbf{v_3}) = O(N^{1/2}\log N).$$

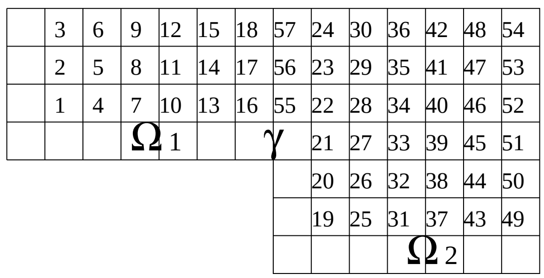
Така получаваме оценката

$$\mathcal{N}_{DD}^{it} = 2[\mathcal{N}(A_{1,1}^{-1}\mathbf{v_1}) + \mathcal{N}(A_{2,2}^{-1}\mathbf{v_2})] + O(N).$$

Следователно ефективността на реализацията на DD се определя от изчислителната сложност на решаване на съответните задачи в подобластите Ω_1 и Ω_2.

13.3 DD за области съставени от правоъгълници.

DD методите имат важно приложение при задачи с разделящи се променливи в области, които са съставени от правоъгълни подобласти. Такъв пример е показан на Фиг. **??**.



Фигура 2: Разделяне на областта на правоъгълни подобласти без припокриване.

В този случай, за решаване на съответните задачи в подобластите Ω_1 и Ω_2 можем да приложим метод на разделяне на променливите. Както знаем, ако за реализация на алгоритъма използваме БПФ, то

$$\mathcal{N}(A_{1,1}^{-1}\mathbf{v_1}) + \mathcal{N}(A_{2,2}^{-1}\mathbf{v_2}) = O(N \log N)$$

и следователно

$$\mathcal{N}_{DD}^{PCG} = O(N \log N).$$

Това означава, че в разгледания случай DD методът за преобуславяне е почти оптимален.

Нека още веднъж отбележим, че матриците $A_{1,3}$ и $A_{2,3}$ са много силно разредени. Те имат ненулеви елементи само в редовете, съответсващи на възли, които са съседни на интерфейса γ. В конкретния пример, $A_{1,3}$ и $A_{2,3}$ са матрици с размерност 18×3 и 36×3, които имат вида

$$A_{1,3} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_{2,3} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \\ & & \end{bmatrix}.$$