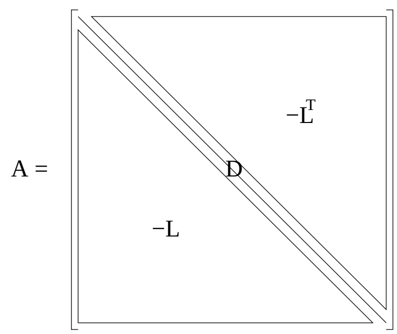
# 10 Преобуславяне. Поточкова непълна факторизация MIC(0).

## 10.1 Алгоритъм. Устойчивост.

Тук ще разгледаме модифицирана непълна факторизация на Холецки от нулев ред, която в литературата е известна със съкращението MIC(0) (Modified Incomplete Cholesky factorization).




Фигура 1: Представяне на матрицата при MIC(0) факторизация.

Нека запишем реалната матрица $A = (a_{ij})$ с размерност $n \times n$ във вида

$$A = D - L - L^T$$

където $D$ е диагоналът, а $(-L)$ строго долната триъгълна част на $A$. В сила е факторизацията

$$A = (R - L)R^{-1}(R - L)^T.$$

Симетричната матрица $R$ се определя еднозначно от равенството

$$D - L - L^T = A = (R - L)R^{-1}(R - L)^T = R - L - L^T + LR^{-1}L^T$$

и следователно

$$R = D - L^T R^{-1} L.$$

В общия случай матрицата $R$ е плътна. Нека разгледаме приближената (непълна) факторизация на $A$ във вида

$$\mathbf{C}_{MIC(0)}(A) = \mathbf{C}_{MIC(0)} = (X - L)X^{-1}(X - L)^T,$$

където $X = diag(x_1, \cdots, x_n)$ е диагонална матрица, която се определя от условието за равенство на сумата на елементите по редове, т.е.

$$\mathbf{C}_{MIC(0)}\underline{e} = A\underline{e}, \qquad \underline{e} = (1, \cdots, 1)^t \in I\!R^n.$$

Тъй като целта ни е да конструираме преобусловител, то ние се интересуваме от случая когато $X > 0$ и следователно $C_{MIC(0)}$ е положително определена. Когато това условие е в сила, казваме че факторизацията MIC(0) е устойчива. Достатъчни условия за съществуване на устойчива $MIC(0)$ факторизация са формулирани в следващата теорема.

**Теорема 10.1** *Нека $A = (a_{ij})$ е симетрична реална матрица с размерност $n \times n$ и нека $A = D - L - L^t$. Нека са в сила условията*

$$\begin{array}{rcl} L & \geq & 0 \\ A\underline{e} & \geq & 0 \\ A\underline{e} + L^t\underline{e} & > & 0 \qquad \underline{e} = (1, \cdots, 1)^t \in I\!R^n. \end{array}$$

*С други думи, $A$ е слабо диагонално доминираща матрица с неположителни извъндиагонални елементи, като $A + L^T = D - L$ е строго диагонално доминираща.*
*Тогава, формулата*

$$x_i = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{a_{ik}}{x_k} \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}$$

*е коректна, елементите $x_i$ са положителни и диагоналната матрица $X = diag(x_1, \cdots, x_n)$ дефинира устойчива MIC(0) факторизация на $A$.*

**Забележка 10.1** *Известно е, че качествата на MIC(0) преобусловителя се подобряват за разглеждания клас задачи, ако факторизацията се приложи към модифицираната матрица*

$$\tilde{A} = A + \tilde{D}.$$

*Диагоналната пертурбация $\tilde{D} = \tilde{D}(\xi) = diag(\tilde{d}_1, \ldots \tilde{d}_N)$ се дефинира, както следва*

$$\tilde{d}_i = \left\{ \begin{array}{lll} \xi a_{ii} & \text{ако} & a_{ii} \geq 2w_i \\ \xi^{1/2} a_{ii} & \text{ако} & a_{ii} < 2w_i \end{array} \right. ,$$

*където*

$$w_i = -\sum_{j>i} a_{ij}.$$

*Тук $0 < \xi < 1$ е константа, която по порядък е равна на минималното собствено число на $A$. За моделната задача това означава, че можем да иберем $\xi = h^2$.*

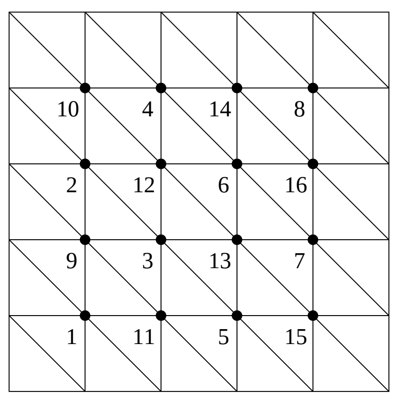
## 10.2 Влияние на номерацията. Пример.

Нека разгледаме отново моделната задача

$$-\Delta u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = f$$

в единичния квадрат $\Omega = (0,1)\times(0,1)$ с условия на Дирихле върху границата $\Gamma = \partial\Omega$. Непосредствено се проверява, че условията за устойчива MIC(0) факторизация са в сила в случая на естествена номерация по вертикални линии от мрежата.

Тук ще разгледаме една алтернативна номерация, известна в литературата като *двуцветна* или *червено-черна*, виж Фигура 2.




Фигура 2: Двуцветна номерация за моделна задача в единичния квадрат.

В този случай, матрицата на коравина има вида

$$
A = \left[\begin{array}{cccccccc|cccccccc}
4 & & & & & & & & -1 & & -1 & & & & & \\
 & 4 & & & & & & & -1 & -1 & & -1 & & & & \\
 & & 4 & & & & & & -1 & & -1 & -1 & -1 & & & \\
 & & & 4 & & & & & & -1 & & -1 & & -1 & & \\
 & & & & 4 & & & & & & -1 & & -1 & & -1 & \\
 & & & & & 4 & & & & & & -1 & -1 & -1 & & -1 \\
 & & & & & & 4 & & & & & & -1 & & -1 & -1 \\
 & & & & & & & 4 & & & & & & -1 & & -1 \\
\hline
-1 & -1 & -1 & & & & & & 4 & & & & & & & \\
 & -1 & & -1 & & & & & & 4 & & & & & & \\
-1 & & -1 & & -1 & & & & & & 4 & & & & & \\
 & -1 & -1 & -1 & & -1 & & & & & & 4 & & & & \\
 & & -1 & & -1 & -1 & -1 & & & & & & 4 & & & \\
 & & & -1 & & -1 & & -1 & & & & & & 4 & & \\
 & & & & -1 & & -1 & & & & & & & & 4 & \\
 & & & & & -1 & -1 & -1 & & & & & & & & 4
\end{array}\right].
$$

Получената $2 \times 2$ блочна матрица има диагонални блокове, които са диагонални матрици. Тази структура създава специални предпоставки за паралелна реализация на итерационни методи от тип Гаус-Зайдел и SSOR. За съжаление двуцветната номерация е неприложима за реализация на MIC(0) факторизация. Причината е, че не са в сила условията за устойчива факторизация. Очевидно, в разгледания пример $A + L^T = D - L$ не е строго диагонално доминираща относно редовете с номера 12 и 13.

**Забележка 10.2** *Условията за устойчива MIC(0) факторизация зависят не само от глобалните свойства на линейния оператор, а и от номерацията при която е получена матрицата на коравина.*

## 10.3 Сходимост и изчислителна сложност

При доста общи предположения, за разглеждания клас задачи е в сила следната оценка за относителното число на обусловеност

$$\kappa(\mathbf{C}_{MIC(0)}^{-1}A) = O(N^{1/2}).$$

Следователно броят на итерациите в метода на спрегнатия градиент с MIC(0) преобусловител е

$$n_{MIC(0)}^{it} = O(N^{1/4}).$$

Лесно се вижда, че изчислителната сложност на една PCG итерация в този случай е $O(N)$ и следователно за общата изчислителна сложност за решаване на задачата получаваме

$$\mathcal{N}_{MIC(0)}^{PCG} = O(N^{5/4}).$$

Ще разгледаме по-подробно броя на аритметичните операции, необходими за реализиране на една PCG итерация с преобусловител MIC(0). Всяка PCG итерация включва решаване на една система с преобусловителя $\mathbf{C}_{MIC(0)}$, едно умножение на оригиналната матрица на коравина $A$ по вектор, две скаларни произведения и три свързани векторни операции от вида $\mathbf{v} := \alpha\mathbf{v} + \mathbf{u}$. Следователно

$$\mathcal{N}_{MIC(0)}^{it} \approx \mathcal{N}(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{v}) + \mathcal{N}(A\mathbf{v}) + 10N.$$

Решаването на система с преобусловителя

$$\mathbf{C}_{MIC(0)} = (X - L)X^{-1}(X - L)^T$$

се свежда до решаване на система с долната триъгълна матрица $(X - L)$, решаване на система с диагоналната матрица $X$ и накрая решаване на система с горната триъгълна матрица $(X-L)^T$. Следователно за моделната задача получаваме $\mathcal{N}(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{v}) \approx 11N$, $\mathcal{N}(A\mathbf{v}) \approx 9N$ и окончателно

$$\mathcal{N}_{MIC(0)}^{it} \approx 30N.$$

Този анализ показва, че разгледаният алгоритъм е с доста ниска изчислителна сложност. Нека отбележим, че решаването на системата с преобуславящата матрица има приблизително една трета от общата изчислителна цена, което е и цената за умножение на матрицата на коравина по вектор.