1 Метод на крайните елементи. Асемблиране на матрицата на коравина.

1.1 Метод на крайните елементи.

Методът на крайните елементи възниква, като матричен метод за решаване на инженерни задачи от механика на конструкциите. Неговата роля в тази област и днес запазва фундаменталното си значение. В този контекст, матрицата на системата линейни алгебрични уравнения, описващи напрегнатото и деформирано състояние на конструкцията е наречена матрица на коравина. Скоро става ясно, че методът има много по-общ характер и днес той е основно средство за числено решаване на диференциални уравнения.

Нека разгледаме елиптичната гранична задача

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) &= f, && \text{за } (x_1,x_2)\in\Omega, \\ u &= 0, && \text{за } (x_1,x_2)\in\Gamma_D, \ . \\ \sum_{i,j=1}^{2} p_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}n_i &= 0, && \text{за } (x_1,x_2)\in\Gamma_N, \end{aligned} \tag{1.1}$$

Вариационната формулировка на (1.1) се записва във вида: за дадена дясна част $f \in L^2(\Omega)$ търсим $u \in H_0^1(\Omega)$, такова че

$$a(u,v) = \int_\Omega f v d\Omega, \quad \text{за всяко } v \in H_0^1(\Omega),$$

където

$$a(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} p_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial v}{\partial x_j} d\Omega, \quad u,v \in H_0^1(\Omega).$$

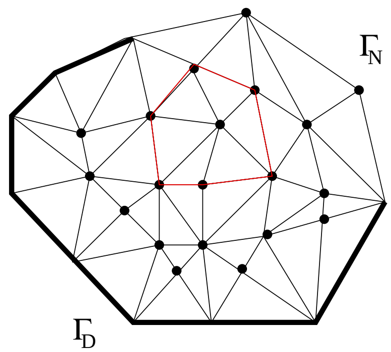
При най-общи предположения за коефициентите, $[p_{ij}(x_1,x_2)]$ е симетрична и положително определена матрица. Прилагаме МКЕ и получаваме дискретната задача: търсим $u_h \in V \subset H_0^1(\Omega)$, такова че

$$a(u_h,v_h) = \sum_{e\in T} a_e^{(h)}(u_h,v_h) = (f,v_h) \quad \text{за всяко } v_h \in V, \tag{1.2}$$

където

$$a_e^{(h)}(u_h,v_h) = \int_e \sum_{i,j=1}^{2} p_{ij}^{(e)}\frac{\partial u_h}{\partial x_i}\,\frac{\partial v_h}{\partial x_j} de.$$

Нека $\mathcal{T}$ е множеството от съгласувани триъгълници, които покриват областта Ω (виж Фиг.1). Тук предполагаме, че Ω е полигон. С V е означено пространството от тестови функции в МКЕ при дискретизация с линейни триъгълни елементи. Това означава, че функциите от V са непрекъснати в ω и са линейни във всеки един от триъгълниците от $\mathcal{T}$.



Фигура 1: Дискретизация с линейни триъгълни крайни елементи.

Всяка функция от V е еднозначно определена от своите стойности във върховете на триъгълниците от $\mathcal{T}$, които се наричат още възли на мрежата. Размерността на пространството V е равна на броя на възлите, за които не са наложени гранични условия на Дирихле. Нека означим с $\bar{N}$ броя на възлите от $\mathcal{T}$, а с N съответно размерността на V. Лагранжевият базис $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ на V се дефинира, както следва:

$$\phi_i(v_j) = \delta_{ij} \quad \text{за всяко } 1 \leq i, j \leq \bar{N}$$

където v_j са възлите от мрежата, а δ_{ij} е символът на Кронекер. Базисните функции в МКЕ имат локален носител. Така например, функцията $\phi_i(x_1, x_2)$ е различна от нула само в триъгълниците, които имат за връх възела v_j. Това свойство е илюстрирано на Фиг.1, където носителят на базисната функция е маркиран с червен контур.

Нека запишем приближеното решение u_h във вида

$$u_h = \sum_{i=1}^{N} u_i \phi_i,$$

където $u_i = u_h(v_i)$ са неизвестните възлови параметри в МКЕ.

Дискретната задача (1.2) е еквивалентна на: търсим $u_h \in V \subset H_0^1(\Omega)$, такова че

$$a(u_h, \phi_i) = \sum_{e \in T} a_e^{(h)}(u_h, \phi_i) = (f, \phi_i) \quad \text{за всяко} \ \ 1 \leq i \leq N. \tag{1.3}$$

Така получаваме системата от линейни алгебрични уравнения

$$A\mathbf{u} = \mathbf{f}, \tag{1.4}$$

където $\mathbf{u} = \{u_i\}_{i=1}^N$,

$$A = [a_{ij}]_{i,j=1}^N, \quad a_{ij} = a(\phi_i, \phi_j)$$

и

$$\mathbf{f} = \{f_i\}_{i=1}^N, \quad f_i = (f, \phi_i).$$

Запазвайки терминологията въведена при анализа на строителни конструкции, A продължава да се нарича матрица на коравина, при най-общи предположения за разглежданата елиптична гранична задача.

Забележка 1.1 *Нека отбележим, че матрицата A не се променя, ако граничните условия на елиптичната задача са нехомогенни. Това означава, че от гледна точка на методите за решаване на системата (1.4), задачата (1.1) е в най-обща постановка.*

Забележка 1.2 *Важно място в настоящия курс има моделната задача*

$$-\Delta u = -u_{xx} - u_{yy} = f, \tag{1.5}$$

където: (а) областта Ω е единичния квадрат $(0,1)^2$; (б) $\Gamma_D = \partial\Omega$, т.е. върху цялата граница са наложени хомогенни гранични условия на Дирихле; (с) триангулацията е получена върху равномерна мрежа със стъпка $h = 1/(n+1)$.

1.2 Асемблиране на матрицата на коравина.

Едно от основните преимущества на МКЕ е неговата алгоритмична универсалност. Адитивното представяне на вариационната формулировка и локалността на базиса дават възможност за ефективна работа с елементни матрици на коравина, които се дефинират, както следва:

$$A_e = [a_{e;ij}]_{i,j=1}^{3}, \quad a_{e;ij} = a_e(\phi_{e;i}, \phi_{e;j}),$$

където $\phi_{e;i}, i = 1, 2, 3$ са локалните базисни функции, съответстващи на елемента e.

От елементните матрици A_e се асемблира глобалната матрица на коравина, като елементите им се сумират с натрупване по следния алгоритъм:

$do \;\; i_e = 1, N_e$

$\quad do \;\; i = 1, 3$

$\quad do \;\; j = 1, 3$

$\qquad a(itop(i_e, i), itop(i_e, j)) := a(itop(i_e, i), itop(i_e, j)) + a_{e;ij}$

$\quad enddo$

$\quad enddo$

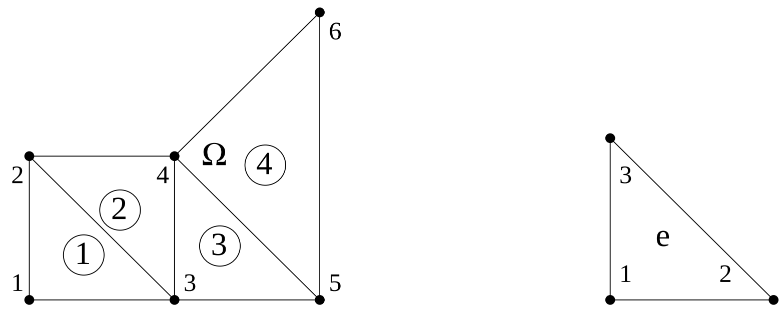
$enddo$,

където N_e е броят на елементите от триангулацията $\mathcal{T}$, а $itop(i_e, i)$ е съответсвието между локалната номерация на възлите на крайните елементи и тяхната глобална номерация. Можем да си представим $itop$ като двумерен масив с N_e реда и 3 стълба.

Пример: Нека разгледаме асемблиране на матрицата на коравина за уравнението $-\Delta u = f$ в областта Ω от Фиг. 2. В съответствие с показаната локална и глобална номерация, топологията на мрежата се описва от следния масив $itop$:

$$itop = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Нека отбележим, че за разглежданото моделно диференциално уравнение,



Фигура 2: Асемблиране на матрицата на коравина.

елементната матрица на коравина зависи само от ъглите на съответния триъгълник. Тъй като Ω е съставена от 4 равнобедрени правоъгълни триъгълника, то всички елементни матрици на коравина са равни на

$$A_e = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В следващите четири матрици е показано асамблирането на глобалната матрица, като $A^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, 4$ показва резултата след натрупването на елементните матрици от първите k елемента. Следователно $A = A^{(4)}$.

$$A^{(1)} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & & & \\ -1 & 1 & & & & \\ -1 & & 1 & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \qquad A^{(2)} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & & -1 & & \\ -1 & & 2 & -1 & & \\ & -1 & -1 & 2 & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix}$$

$$A^{(3)} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & & -1 & & \\ -1 & & 4 & -2 & -1 & \\ & -1 & -2 & 3 & & \\ & & -1 & & 1 & \\ & & & & & \end{bmatrix} \qquad A^{(4)} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & & -1 & & \\ -1 & & 4 & -2 & -1 & \\ & -1 & -2 & 5 & -1 & -1 \\ & & -1 & -1 & 2 & \\ & & & -1 & & 1 \end{bmatrix}$$